Prof. Dr. L. Kramer
Dr. A. Wörner
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 10/11

1. Hausaufgabenblatt zur Analysis III

(**Abgabe:** bis Donnerstag 28.10.2010, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung.

Unterraumtopologie, Produkttopologie, Abschluss einer Teilmenge.

Wenn M eine Menge ist—was ist $\bigcup M$?

Aufgabe 1.1 (Unterraumtopologie)

Gegeben seien ein topologischer Raum X und Teilmengen $Z \subseteq Y \subseteq X$. Zeigen Sie: Die Unterraumtopologien von Z als Unterraum von X und als Unterraum des Unterraumes Y stimmen überein.

Aufgabe 1.2 (abgeschlossene Mengen, kartesisches Produkt)

Es seien X und Y topologische Räume. Weiter seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass $A \times B \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 1.3 (Abschluss, offene und abgeschlossene Mengen)

Gegeben seien ein topologischer Raum X und eine Teilmenge $A \subseteq X$. Beweisen Sie die folgende Charakterisierung des Abschlusses $\bar{A}$: Es ist $x \in \bar{A}$ genau dann, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ gilt, dass $U \cap A \neq \emptyset$ ist.

Hinweis: Eine offene Menge U mit $x \in U$ nennt man auch *offene Umgebung* von x. Benutzen Sie zum Beweis der obigen Äquivalenz Kontraposition, also zeigen Sie, dass $x \notin \bar{A}$ genau dann gilt, wenn es eine offene Umgebung U von x gibt mit $U \cap A = \emptyset$.

Aufgabe 1.4 (Abschluss, abgeschlossene Mengen)

Gegeben seien ein topologischer Raum X und eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen des Raumes X. Zeigen Sie: $\overline{\bigcup \mathcal{S}} \supseteq \bigcup\{\bar{A} \mid A \in \mathcal{S}\}$. Geben Sie ein Beispiel an, bei dem keine Gleichheit gilt. Zeigen Sie weiter, dass Gleichheit gilt, wenn $\mathcal{S}$ endlich ist.

Hinweis: Wenn $\mathcal{S}$ endlich ist, genügt es zu zeigen, dass $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ für beliebige Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt (warum?). Was geht beim Beweis schief, wenn unendlich viele Mengen vereinigt werden?

Literatur

- J. Munkres, Topology, a First Course
- J. Dugundji, Topology
- J. Kelley, General Topology
- P. Halmos, Measure Theory
- G. Pedersen, Analysis Now
- W. Walter, Analysis I,II, Springer Verlag
- H. Heuser, Lehrbuch der Analysis. Teil 1,2, Teubner, Stuttgart
- O. Forster, Analysis III, Vieweg Verlag
- S. Lang, Real and Functional Analysis
- A. Beutelspacher, Das ist oBdA trivial, Vieweg Verlag

Organisatorisches

Sie dürfen in Zweier-Gruppen abgeben, wenn beide Mitglieder zur gleichen Übungsgruppe gehören. Grundsätzlich gilt: wer seinen Namen auf ein Aufgabenblatt schreibt, muss in der Lage sein, alle Aufgaben auf diesem Blatt vorzurechnen.
Die Nummer des Zettelkastens zur Abgabe Ihrer Hausaufgaben ist folgender Tabelle zu entnehmen:

Übungsgruppe	Zettelkasten
Di 10-12 in SR 1C	160
Di 12-14 in SR 1C	162
Di 12-14 in SR 1A	163
Di 14-16 in SR 1C	164

Übungsgruppe	Zettelkasten
Di 16-18 in SR 1A	166
Mi 8-10 in SR 1C	168
Mi 14-16 in SR 2	169
Mi 16-18 in SR 1A	170

Die Aufgabenblätter, das Vorlesungsskript sowie aktuelle Informationen zur Veranstaltung finden Sie auf folgender Webseite:
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=analysis_III_10&menu=teach&lang=de`