7. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Dr. Cora Welsch

Aufgabe 7.1
Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(i) $a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 3$.

(ii) $a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \pmod 9$.

(iii) $a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \cdots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 \pmod 5$.

Aufgabe 7.2
Beweisen Sie folgende Teilbarkeitsregeln aus der Schule. Zahlen werden dabei in Dezimalschreibweise dargestellt.

(i) Eine ganze Zahl ist durch 3 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

(ii) Eine ganze Zahl ist durch 9 teilbar genau dann, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

(iii) Eine ganze Zahl ist durch 5 teilbar genau dann, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

Hinweis: Sie können die vorige Aufgabe benutzen.

Erinnerung: für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ ist $m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 2 \cdot 1$.

Aufgabe 7.3
Zeigen Sie: Ist p eine Primzahl, so gilt

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Hinweis: betrachten Sie die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/p)^*$ des Körpers $\mathbb{Z}/p$. Sie dürfen das Ergebnis aus Aufgabe 7.4 benutzen.

Aufgabe 7.4
Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass ± 1 die einzigen Lösungen der Gleichung $x^2 = 1$ sind. Bestimmen Sie weiter alle Lösungen der Gleichung $x^2 = 1$ im kommutativen Ring $(\mathbb{Z}/8, +, \cdot)$. Wie passen die beiden Ergebnisse zusammen?

Hinweis: benutzen Sie für den ersten Teil die dritte binomische Formel.

Abgabe bis: Donnerstag, den 7.6.2018, 8 Uhr