5. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 5.1
Sei $f : G \to K$ ein Homomorphismus der abelschen Gruppen $(G, *_G)$ und $(K, *_K)$. Zeige:

a) Für die Neutralelemente $e_G \in G$ und $e_K \in K$ gilt $f(e_G) = e_K$.

b) Ist x' das Inverse von $x \in G$, so ist $f(x')$ das Inverse von $f(x)$.

c) Das Bild $f(G) \subseteq K$ ist eine Untergruppe von K.

Aufgabe 5.2 (9 Punkte)
Wir betrachten die abelschen Gruppen $(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ und $((\mathbb{Z}/5)^*, \cdot)$. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, x \mapsto -x$

b) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto |x|$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die Abrundungs-Funktion $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ ist

d) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto x^2$

e) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \log|x|$

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ fest

g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^*, x \mapsto 2^x$

h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

i) $f : (\mathbb{Z}/5)^* \to (\mathbb{Z}/5)^*, [x]_5 \mapsto ([x]_5)^5 = [x^5]_5$

Abgabe bis: Donnerstag, den 17.5.2018, 8 Uhr