4. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018 | Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster | Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 4.1
Seien $a, b, d \in \mathbb{Z}$ mit $d > 0$ sowie $d|a$ und $d|b$. Weiter gelte für alle $x \in \mathbb{Z}$:

$$(x|a \text{ und } x|b) \Rightarrow x|d$$

Zeige: $d = \text{ggT}(a, b)$

Aufgabe 4.2
Sei $(G, *)$ eine abelsche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Wir definieren eine Relation $\equiv_H$ auf G durch

$$x \equiv_H y \Leftrightarrow x' * y \in H,$$

wobei x' das Inverse von x bezeichnet. Zeige:

a) $\equiv_H$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Die Äquivalenzklassen von $\equiv_H$ sind genau die Nebenklassen bzgl. H.

Aufgabe 4.3
Sei G eine abelsche Gruppe. Zeige:

a) $\{e\}$ und G sind Untergruppen von G.

b) Ist $(G, *)$ eine endliche abelsche Gruppe und $\#G = p$ eine Primzahl, so sind G und $\{e\}$ die einzigen Untergruppen von G.

Aufgabe 4.4
Bestimme alle Untergruppen der abelschen Gruppe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Beweise, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

i) Es gilt $n|m$.

ii) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $(a + n\mathbb{Z}) \cap (b + m\mathbb{Z}) = \emptyset$ oder $b + m\mathbb{Z} \subseteq a + n\mathbb{Z}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 10.5.2018, 8 Uhr