

3. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Cora Welsch

Aufgabe 3.1

Prüfe, welche der Axiome (i), (ii), (iii) und (iv) einer abelschen Gruppe für die folgenden Beispiele erfüllt sind.

- a) Sei $G = \mathbb{Z} - \{0\}$ und die Verknüpfung auf G die gewöhnliche Multiplikation ganzer Zahlen.
- b) Sei $G = [0, 1]$ mit der Verknüpfung $x \cdot y = \max\{x, y\}$.
- c) Sei X eine Menge und $G = \mathcal{P}(X) := \{U \mid U \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X mit $U \cdot V = U \cup V$ als Verknüpfung.
- d) Sei $G = C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ mit der punktweisen Addition $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ als Verknüpfung.

Aufgabe 3.2

Sei G eine abelsche Gruppe und seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen von G . Zeige: $H_1 \cup H_2$ ist genau dann eine Untergruppe, wenn $H_1 \subseteq H_2$ oder $H_2 \subseteq H_1$ gilt.

Aufgabe 3.3

Zeige: Für jedes $z \in \mathbb{Z}$ gilt $z^2 \equiv 0, 1$ oder $4 \pmod{8}$.

Aufgabe 3.4

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf \mathbb{Z} ?

- a) $a \sim b :\Leftrightarrow a|b$
- b) $a \sim b :\Leftrightarrow (a > 0 \text{ und } b > 0) \text{ oder } (a < 0 \text{ und } b < 0) \text{ oder } (a = 0 = b)$
- c) $a \sim b :\Leftrightarrow 2|(a + b)$
- d) $a \sim b :\Leftrightarrow 7|(a - b) \text{ oder } 13|(a - b)$

Bitte wenden.

***-Aufgabe**

Sei $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ und sei $T = \{b \in \mathbb{N} \mid b|a\}$ die Menge der positiven Teiler von a .
Wir schreiben $T = \{1 = t_1 < t_2 < \dots < t_s = a\}$. Zeige: $t_1 \cdot \dots \cdot t_s = a^{\frac{s}{2}}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 3.5.2018, 8 Uhr