§ 5 Zahlen

Wir betrachten zum Abschluss den Aufbau des Zahlsystems,
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Wir nehmen dazu an, wir "kennen" $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
(d.h. wir vermeiden die Frage, was eine natürliche Zahl ist).

1. Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$

Motivation: wir wollen Gleichungen der Form $x + b = a$
lösen können, für alle $a, b \in \mathbb{N}$, also auch $x + 7 = 2$

Setze $Z = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ und definiere

$$(a,b) \sim (a',b') \overset{\text{Def}}{\iff} a + b' = a' + b$$

Das ist eine Äquivalenzrelation:

$$(a,b) \sim (a,b), \quad (a,b) \sim (a',b') \Rightarrow (a',b') \sim (a,b) \quad \text{klar}$$

$$(a,b) \sim (a',b') \sim (a'',b'')$$

$$a + b' = a' + b \qquad a' + b'' = a'' + b'$$

$$\Rightarrow a + \underbrace{b' + a'}{} + b'' = \underbrace{a' + b + a'' + b'}{} \qquad \text{kürzen}$$

$$a + b'' = a'' + b \qquad \text{d.h.} \quad (a,b) \sim (a'',b'')$$

Wir schreiben $a - b$ für die Äquivalenzklasse von
(a,b) und setzen $a \in \mathbb{N}$ mit $a - 0$ gleich

Definiere Verknüpfungen $+, \cdot$ auf solchen Klassen durch

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \overset{\text{Def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$\wr \qquad\qquad \wr$$
$$(a_1', b_1') + (a_2', b_2') = (a_1' + a_2', b_1' + b_2')$$

Wenn

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1' = a_1' + b_1 \\ a_2 + b_2' = a_2' + b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \sim (a_1' + a_2', b_1' + b_2')$$

(nachrechnen)

Wir erhalten wohldefinierte Verknüpfung

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \overset{\text{Def}}{=} (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)$$

Weiter nachrechnen, dass die Verknüpfung assoziativ und kommutativ ist, mit $0 - 0$ als Neutralelement.

Definiere $\mathbb{Z} = \{ a - b \mid a, b \in \mathbb{N} \}$ mit der Verknüpfung von eben.

Definiere weiter $(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)$

und zeige, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring wird

$\rightarrow$ viele elementare Rechnungen nötig.

2. Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$

Setze $\mathbb{Q} = \{ (a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$ und definiere

$$(a,b) \approx (a', b') \Leftrightarrow a \cdot b' = a' \cdot b$$

Zeige, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}$ ist

und schreibe $\frac{a}{b}$ für die Äquivalenzklasse von (a,b)

bzgl $\approx$. Rechne dann nach, dass

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \overset{\text{Def}}{=} \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 \cdot b_2} \qquad \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot a_2}{b_1 \cdot b_2}$$

wohldefinierte Verknüpfungen sind und dass die Menge

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ mit diesen Verknüpfungen $+, \cdot$ ein Körper ist → viele (elementare) Rechnungen nötig

3. Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$.

Wir betrachten *rationale Folgen* $(q_n)_{n \geq 0}$, $q_n \in \mathbb{Q}$.

Eine rationale Folge $(q_n)_{n \geq 0}$ heißt

(a) *beschränkt*, falls es $K \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass $|q_n| \leq K$ für alle $n \geq 0$ gilt

(b) *Cauchy Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $i, j \geq N(\varepsilon)$ gilt $|q_j - q_i| \leq \varepsilon$

(c) *Nullfolge*, falls es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ ein $M(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $i \geq M(\varepsilon)$ gilt $|q_i| \leq \varepsilon$

Für rationale Folgen $(q_n)_{n \geq 0}$ und $(r_n)_{n \geq 0}$ definiere

$$(q_n)_{n \geq 0} + (r_n)_{n \geq 0} = (q_n + r_n)_{n \geq 0}$$

$$(q_n)_{n \geq 0} \cdot (r_n)_{n \geq 0} = (q_n \cdot r_n)_{n \geq 0}$$

Man rechnet leicht nach: mit diesen Verknüpfungen wird die Menge *aller* rationalen Folgen ein *kommutativer*

Ring F, mit Nullelement $(0,0,0,0,\ldots)$ und Einselement $(1,1,1,1,\ldots)$. Wir können $\mathbb{Q}$ als Teilring auffassen, mit

$$q \longmapsto (q,q,q,q,\ldots) \qquad \text{(konstante Folgen)}$$

4. Fakten (i) Jede Cauchyfolge ist beschränkt
(ii) Jede Nullfolge ist Cauchyfolge
(iii) Die beschränkten Folgen bilden einen Teilring $B \subseteq F$ und die Cauchyfolgen bilden einen Teilring $C \subseteq B \subseteq F$.

Beweis (i) Sei $(q_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge, sei $N = N(1)$ und sei $K_1 = \max\{|q_j| \mid 0 \leq j \leq N(1)\}$

$$K_2 = |q_N| + 1 \qquad K = \max\{K_1, K_2\}$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $|q_i| \leq K$.

(ii) Setze $N(\varepsilon) = M(\frac{1}{2}\varepsilon)$

$$i,j \geq M(\tfrac{1}{2}\varepsilon) \Rightarrow |q_i|, |q_j| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |q_i - q_j| \leq \varepsilon$$

(iii) Ist $(q_n)_{n\geq 0}$ durch K beschränkt und $(r_n)_{n\geq 0}$ durch L beschränkt, so ist

$(q_n)_{n\geq 0} + (r_n)_{n\geq 0}$ durch $K+L$ beschränkt

$(q_n)_{n\geq 0} \cdot (r_n)_{n\geq 0}$ durch $K \cdot L$ beschränkt

$(1,1,1,\ldots)$ ist beschränkt.

$(q_n)_{n\geq 0}$ beschränkt $\Rightarrow$ $(-q_n)_{n\geq 0}$ beschränkt

Folglich ist B ein Teilring von F.

Zeige nun, dass $G \subseteq B$ ein Teilring ist. Sei $\varepsilon > 0$, seien $(q_n)_{n\geq 0}$ sowie $(r_n)_{n\geq 0}$ rationale Cauchyfolgen.

(a) Wähle $N \geq 0$ so, dass $|q_i - q_j|, |r_i - r_j| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $i,j \geq N$. Es folgt $|(q_i + r_i) - (q_j + r_j)| \leq \varepsilon$ für alle $i,j \geq N$, also $(q_n)_{n\geq 0} + (r_n)_{n\geq 0} \in G$.

(b) Weiter ist $(-q_n)_{n\geq 0}$ in G (klar), sowie $(1,1,1,\dots) \in G$, $(0,0,0,\dots) \in G$

(c) Wähle $K \geq 1$ so, dass $|q_i|, |r_i| \leq K$ für alle $i \geq 0$ sowie $N \geq 0$ so, dass $|q_i - q_j|, |r_i - r_j| \leq \frac{\varepsilon}{2\cdot K}$ für alle $i,j \geq N$.

Es folgt

$$|q_i \cdot r_i - q_j \cdot r_j| = |q_i \cdot r_i - q_i \cdot r_j + q_i \cdot r_j - q_j \cdot r_j|$$

$$\leq |q_i| \cdot |r_i - r_j| + |r_j| \cdot |q_i - q_j| \leq K \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

also $(q_n)_{n\geq 0} \cdot (r_n)_{n\geq 0} \in G$ $\square$

5. <u>Satz</u> $N \subseteq G$ ist ein Ideal und G/N ist ein Körper

<u>Beweis</u> Es gilt $(0,0,0,\dots) \in N$. Summen und Differenzen von Nullfolgen sind wieder Nullfolgen, also ist $N \subseteq G$ Untergruppe. Ist $(q_n)_{n\geq 0} \in G \subseteq B$ und $(r_n)_{n\geq 0} \in N$, ~~so~~ so ist $(q_n)_{n\geq 0} \cdot (r_n)_{n\geq 0}$ wieder eine Nullfolge (weil Cauchyfolgen beschränkt sind). Also gilt $N \trianglelefteq G$ (sogar $N \trianglelefteq B$).

Sei nun $(q_n)_{n\geq 0} \in C$ keine Nullfolge. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und $N \geq 0$ so, dass $|q_i| \geq 2\cdot\varepsilon$ für alle $j \geq N$. Setze $r_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n < N \\ 1/q_n & \text{falls } n \geq N. \end{cases}$

Dann ist $(r_n)_{n\geq 0}$ keine Nullfolge, aber eine Cauchyfolge, und es gilt $(r_n)_{n\geq 0} \cdot (q_n)_{n\geq 0} = (q_0, \ldots, q_{N-1}, 1, 1, 1, \ldots)$

$$= (1,1,1,\ldots) + \underbrace{(q_0 - 1, q_1 - 1, \ldots, q_{N-1} - 1, 0, 0, 0 \quad)}_{\in N}$$

Folglich $\left((r_n)_{n\geq 0} + N\right) \cdot \left((q_n)_{n\geq 0} + N\right) = (1,1,1\ldots) + N$ $\square$

Wir setzen $\mathbb{R} := C/N$

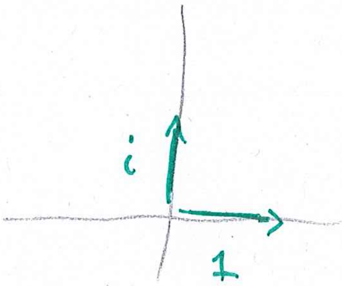
Jetzt nachrechnen: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper mit Anordnung $x \geq 0 \overset{\text{Def}}{\iff}$ es gibt $y \in \mathbb{R}$ mit $x = y^2$ und Supremumseigenschaft: zu jeder nach oben beschränkten Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ existiert eine kleinste obere Schranke $\xi = \sup(X) \in \mathbb{R}$.

Vergleiche Hewitt-Stromberg, Real and abstract Analysis, § I.5 (alles im Detail ausgeführt)

6. Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$

Wir definieren $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (xy-Ebene)

mit Basis $1 = (1,0)$ $i = (0,1)$.



Jede komplexe Zahl ist also von der Form $z = x\cdot 1 + y \cdot i$ mit $x,y \in \mathbb{R}$. Man nennt x und y den <u>Real</u>- bzw. <u>Imaginärteil</u> von z, $x = \mathrm{Re}(z)$ $y = \mathrm{Im}(z)$.

Die Multiplikation wird erklärt durch

$$(a\cdot 1 + b\cdot i)\cdot(c\cdot 1 + d\cdot i) = (ac-bd)\cdot 1 + (bc+ad)\cdot i$$

Der Absolutbetrag von z ist $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Man rechnet nach: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein <u>kommutativer Körper</u> mit Einselement $\underset{1\cdot 1 + 0\cdot i}{\overset{\shortparallel}{1}}$ und Nullelement $0 = 0\cdot 1 + 0 \cdot i$

Es gilt $i\cdot i = -1$ sowie $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$.

Weiter ist $\mathbb{C}$ <u>algebraisch abgeschlossen</u>, d.h. zu jedem Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ mit $\deg(f) \geq 1$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ (also $f = (T-z)\cdot h$ nach §4.8)

Die Gemeinsamkeit der Konstruktion von $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ist: wir definieren die "fehlenden" Elemente als Äquivalenzklassen derjenigen Gleichungen, die sie lösen sollen: negative Zahlen als Äquivalenzklassen von $a = x + b$, rationale Zahlen als Äquivalenzklassen von $a = b \cdot x$, reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen.

Bleibt die Frage: was sind die natürlichen Zahlen?

Antwort der Mengenlehre:

Ist a eine Menge, so sei $a^+ = a \cup \{a\}$.

Konstruktion von $\mathbb{N}$ rekursiv durch

$$
\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= 0^+ = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
2 &:= 1^+ = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
& = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\ \vdots \\
n+1 &:= n^+
\end{aligned}
$$

Es ist mühsam, dann nachzurechnen, dass man mit $n + k = \underbrace{((n+1)+1 \ldots)+1}_{k \text{ mal}}$ eine assoziative Verknüpfung erhält.

Leopold Kronecker: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, der Rest ist Menschenwerk" – stimmt das?