6. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und elementare Zahlentheorie“

SoSe 2017 Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster Cora Welsch

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)
Beweise: ist $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x^2 + y^2 = z^2$, so gilt

(i) $xyz \equiv 0 \pmod 2$,

(ii) $xyz \equiv 0 \pmod 3$,

(iii) $xyz \equiv 0 \pmod 5$,

(iv) $xyz \equiv 0 \pmod{60}$.

Aufgabe 6.2 (2 Punkte)
Beweise oder widerlege, dass $(M, \cdot)$ eine Gruppe ist. Zeige auch, welche Gruppen Axiome erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

(i) $(M, \cdot) = (\mathbb{N}, \max\{m, n\})$,

(ii) $(M, \cdot) = (\mathbb{Z}, -)$.

Aufgabe 6.3 (2 Punkte)
Beweise oder widerlege, dass H eine Untergruppe der Gruppe $(G, \cdot)$ ist. Zeige auch, welche Axiome einer Untergruppe erfüllt bzw. nicht erfüllt sind.

(i) $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$ und $H = \mathbb{P} \cup \{0\}$,

(ii) $(G, \cdot) = (\mathbb{R}, +)$ und $H = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)
Beweise, dass $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(M) \neq 0\}$, die Menge der $n \times n$ Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{R}$ und Determinante ungleich 0, zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist. Zeige weiter, dass $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$ nicht abelsch ist, falls $n \geq 2$.

Bitte wenden.

Aufgabe 6.5 (4 Punkte)
Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe der Gruppe G. Wir definieren auf G eine Relation:

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und die Äquivalenzklassen die Linksnebenklassen von H in G sind.

Abgabe bis: Donnerstag, den 1.6.2017, 8 Uhr