# Vortrag 8:

8.06.2016

$X = (V,E)$ Graph

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Menge der Knoten

$E = \{e_1, \dots, e_m\}$ Menge der Kanten

Motivation: Graph ⇝ Netzwerk ⇝ „dünn" ⇝ $k$-regulär, ⇝ „hochzusammenhängend"

Knoten: Informationen

Kanten: Informationsweitergabe an den Nachbarn: 1 Zeiteinheit

Wie „gut" ist das Netzwerk?

## §1.2 Spektrale Lücke und die isoperimetrische Konstante

**14. Definition**

Sei $X = (V,E)$ ein Graph. Für $F \subseteq V$ definieren wir den Rand $\partial F$ von $F$: Alle Kanten die $F$ mit $V - F$ verbinden.

Es gilt: $\partial F = \partial(V - F)$.

Die *isoperimetrische Konstante von X* ist wie folgt definiert:

$$h(X) := \min \left\{ \frac{|\partial F|}{|F|} \;\middle|\; F \subseteq V,\ |F| \leq \frac{n}{2} \right\}$$

(Je größer $h(X)$, desto "besser" ist das Netzwerk).

Ziel: Konstruktion von Graphen mit $\# V = n$ möglichst groß, $n \to \infty$

$k$ möglichst klein

$h(X)$ so groß wie möglich

**15. Definition**

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Familie von zus. $k$-reg. Graphen mit $\# V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. $(X_n)_{n\geq 1}$ heißt eine <u>Familie von Expandergraphen</u>, wenn ein $\varepsilon > 0$ ex. s.d. gilt: $h(X_n) \geq \varepsilon \ \forall n \geq 1$.

Hauptproblem: Konstruktion von Familien von Expandergraphen (k muss mindestens 3 sein)

Wir übersetzen die Eigenschaft $h(X_n) \geq \varepsilon \ \forall n \geq 1$ in eine spektrale Eigenschaft.

**16. Definition**

Sei $X = (V, E)$ ein zus. $k$-reg. Graph, $A$ die Adjazenzmatrix und $\operatorname{spek}(A) = \{\mu_0 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}\}$ das Spektrum von $A$.

Die <u>spektrale Lücke von $A$</u> ist def. wie folgt:

$$\mu_0 - \mu_1 = k - \mu_1 \quad (\neq 0 \text{ wieso?})$$

**17. Theorem**

Sei $X$ ein zus. $k$-reg. Graph ohne Schleifen. Dann gilt:

$$\frac{k-\mu_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k \cdot (k-\mu_1)}$$

– ohne Beweis –

**18. Korollar**

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Familie von zus. $k$-reg. Graphen ohne Schleifen mit $\# V_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

$(X_n)_{n\geq 1}$ ist eine Familie von Expandergraphen

$\iff \exists\, \varepsilon > 0$ s.d. $k - \mu_1(X_n) \geq \varepsilon \ \forall n \geq 1$

Beweis:

„$\Rightarrow$" $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ s.d. gilt: $h(X_n) \geq \varepsilon_0 \ \forall\, n \geq 1$

$$\overset{\text{Th. 17}}{\rightsquigarrow} \quad \sqrt{2k \cdot (k - \mu_1(X_n))} \geq h(X_n) \overset{\text{Vor.}}{\geq} \varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \quad k - \mu_1(X_n) \geq \frac{\varepsilon_0^2}{2k} =: \varepsilon .$$

„$\Leftarrow$" $\quad \dfrac{k - \mu_1(X_n)}{2} \geq \dfrac{\varepsilon_0}{2}$

$$\overset{\text{Th. 17}}{\Rightarrow} \quad h(X_n) \geq \frac{k - \mu_1(X_n)}{2} \geq \frac{\varepsilon_0}{2} =: \varepsilon . \qquad \square$$

„Spektrale Sicht":

Fazit: je größer $k - \mu_1(X_n)$, desto "besser" ist das Netzwerk

$\rightsquigarrow$ kann nicht zu groß werden

$\rightsquigarrow$ asymptotisches Verhalten

$$\liminf_{n \to \infty} \mu_1(X_n) \geq \, ???$$

**19. Theorem**

Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Familie von zus. $k$-reg. Graphen ohne Schleifen mit $\# V_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Dann gilt:

$$\liminf_{n \to \infty} \mu_1(X_n) \geq 2 \cdot \sqrt{k-1}$$

— ohne Beweis —

$\rightsquigarrow$ Ramanujan Graphen (Optimale Graphen bzgl. der spektralen Sicht auf die Graphen)

**Def:** Die Eigenwerte $k$ und $-k$ heißen trivial.

20. Definition

Sei $X$ ein zus., $k$-reg Graph. $X$ heißt Ramanujan-Graph, wenn für jeden nicht-triviale Eigenwert $\mu$ von $X$ gilt:

$$|\mu| \leq 2 \cdot \sqrt{k-1} \; .$$

(manchmal def. man das nur für $|\mu_2| \leq$ )

Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Familie von $k$-reg. Ramanujan-Graphen ohne Schleifen mit $\# V_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Dann ist $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Familie von Expandergraphen. Diese Familie hat dann die optimalste spektrale Lücke.

Existenz:

In diesem Seminar: Konstruktion von Ramanujan Graphen für $k = p+1$, $p$ ungerade Primzahl

(Lubotzky, Phillips, Sarnak '88)

$\left( \mathrm{Cay} \left( PSL_2 \left( \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \right) \right) \right)$

$k = 3$ (Chiu, '92)

$k = q+1$, $q$ Primzahlpotenz (Morgenstern '94) (für andere $k$ ist das ein offenes Problem)

## §1.3 Unabhängigkeitszahl und die Knotenfärbungszahl (chromatische Zahl)

Sei $X = (V, E)$ ein Graph ohne Schleifen.

**21. Definition**

(i) Die <u>Knotenfärbungszahl $\chi(X)$</u> ist def. wie folgt:

$$\chi(X) := \min \{ k \mid V = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_k \text{ und für } v,w \in V_i \text{ gilt } a_{vw} = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\} \}$$

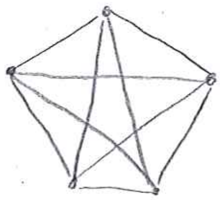
(In Worten: minimale Anzahl an Farben, so dass je zwei benachbarte Knoten unterschiedliche Farben haben).

(ii) Die <u>Unabhängigkeitszahl $i(X)$</u> ist def. wie folgt:

$$i(X) = \max \{ \# F \mid F \subseteq V \text{ und für } v,w \in F \text{ gilt: } a_{vw} = 0 \}$$

**22. Beispiel**

(i) $K_5$



$\chi(K_5) = 5$

$i(K_5) = 1$

(ii) $X$

$\chi(X) = 2$

$i(X) = 2$

Beziehung zwischen $\chi(X)$ und $i(X)$ und $\# V$.

**23. Lemma**

Es gilt: $n = \# V \leq i(X) \cdot \chi(X)$.

<u>Beweis:</u>

Sei $V = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_{\chi(X)}$ eine Knotenfärbung von $X$.

Es gilt: $|V_\ell| \leq i(X)$ für $\ell = 1, \ldots, \chi(X)$.

Wir haben:
$$n = \# V = \# V_1 + \ldots + \# V_{\chi(X)} \leq \chi(X) \cdot i(X)$$

$\square$

Abschätzung von $i(X)$ mit dem Spektrum:

**24. Proposition**

Sei $X$ ein zus. $k$-reg. Graph mit $\operatorname{spek}(X) = \{k = \mu_0 > \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_{n-1}\}$

Dann gilt:

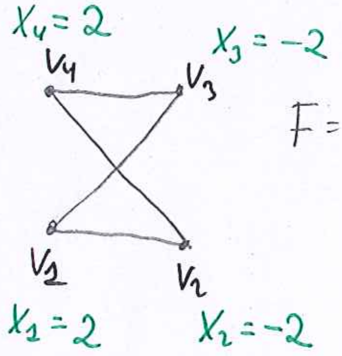
$$i(X) \leq \frac{n}{k} \cdot \max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}$$

<u>Beweisskizze:</u>

- Sei $F \subseteq V$ mit $\# F = i(X)$ und $a_{vw} = 0$ für $v, w \in F$.
- Wir def. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^n$ wie folgt:

$$x_i := \begin{cases} |V - F|, & \text{falls } v_i \in F \\ -|F|, & \text{falls } v_i \in V - F \end{cases}$$

z.B.:




$F = \{v_1, v_4\}$ $\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Sei $v_i \in F$.

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overset{\substack{a_{ij} = 0 \text{ falls } v_j \in F \\ \downarrow}}{=} \sum_{\substack{j \\ v_j \notin F}} a_{ij} \cdot x_j = -|F| \sum_{\substack{j \\ v_j \notin F}} a_{ij}$$

$$= -|F| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overset{k\text{-reg.}}{=} -|F| \cdot k = -k \cdot i(X)$$

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \sum_{v_i \in F} (Ax_i)^2 + \sum_{v_i \notin F} (Ax_i)^2$$

$$\geq |F| \, k^2 \cdot i(X)^2 = k^2 \cdot i(X)^3$$

„Ähnlich" zeigt man:

$$\|Ax\|_2 \leq \max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \cdot i(X)^{\frac{1}{2}} \cdot n$$

Also:

$$k \cdot i(X)^{\frac{3}{2}} \leq \max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \cdot i(X)^{\frac{1}{2}} \cdot n$$

$$\Rightarrow \quad i(X) \leq \frac{n}{k} \cdot \max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\} \qquad \square.$$

2.5. Korollar

Sei $X$ ein zus. $k$-reg. Graph ohne Schleifen. Dann gilt:

$$\chi(X) \geq \frac{k}{\max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}}$$

Falls $X$ ein Ram. Graph ist, dann gilt:

$$\chi(X) \geq \frac{k}{2 \cdot \sqrt{k-1}}$$

Beweis:

- $n \leq i(X) \cdot \chi(X) \Rightarrow \chi(X) \geq \dfrac{n}{i(X)}$
- $i(X) \leq \dfrac{n}{k} \cdot \max\{|\mu_1|, |\mu_{n-1}|\}$

$\square$

## §1.4 Graphen mit großem Umfang und großer Färbungszahl

**26. Definition:**
Sei $X$ ein zus. Graph. Der Umfang von $X$, $\operatorname{girth}(X) = g(X)$, ist die Länge des kürzersten Kreises in $X$.

Wenn $X$ ein Baum ist, dann setzen wir $g(X) = \infty$

Kombinatorisches Problem: $X$ mit „großer Färbungszahl" und „großem" Umfang.

Beobachtung: $X$ Kanten hinzufügen $\rightsquigarrow$ Färbungszahl erhöht sich
$\rightsquigarrow$ Umfang schrumpft

Existenz: propobalistische Methoden (Erdös '59) $\rightsquigarrow$ §1.6.
Konstruktion ($\rightsquigarrow$ später).