<u>Vortrag 7</u> 01.06.16

<u>Bis jetzt:</u> „Trees" v. Serre

<u>Gruppentheorie</u>		<u>Geometrie</u>
Strukturtheorie von Gruppen	$\longleftrightarrow$	Wirkungen auf Bäumen
Amalgame von Gruppen	$\longleftrightarrow$	Insbesondere: Eigenschaft (FA)

<u>Ab jetzt:</u> „Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs" v. Davidoff, Sarnak and Valette

<u>Gruppentheorie</u>		<u>Geometrie</u>
Konstruktion von solchen Familien von Graphen	$\longleftrightarrow$	Familie von endlichen Graphen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit „schönen" Eigenschaften

I. Graphentheorie

§1.1 Die Adjazenz-Matrix und ihr Spektrum

Notation: $X = (V, E)$ Graph
V Menge der Knoten
E Menge der Kanten (wobei wir e und $\bar{e}$ als eine Kante betrachten und auch als eine Kante zählen, also $X = \bullet\!\!-\!\!\bullet$, dann $\# E = 1$)

<u>Ab jetzt:</u> $V = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Methoden um Eigenschaften von Graphen zu studieren
$\rightsquigarrow$ Lineare Algebra

Graph $X \rightsquigarrow$ Matrix A

1. Definition

(i) Sei $X=(V,E)$ ein Graph. Die <u>Adjazenz-Matrix A von X</u> ist wie folgt definiert:

$$A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n} \quad \text{mit } a_{ij} = \text{Anzahl der Kanten die } v_i \text{ mit } v_j \text{ verbinden.}$$

(manchmal schreiben wir für den Eintrag a_{ij} auch $a_{v_i v_j}$)

(ii) Der Graph X heißt <u>einfach</u>, wenn $a_{ij}\in\{0,1\}$ für alle $1\le i,j\le n$.

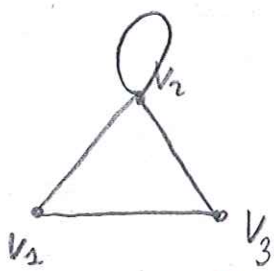
2. Beispiel

(i)

$$A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$$

nicht einfach

(ii)



$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$ einfach

3. Bemerkungen

(i) Die Adjazenz-Matrix ist immer symmetrisch

(ii) Der Graph X hat keine Schleifen $\Leftrightarrow$ $a_{ii}=0$ für alle $1\le i\le n$.

Nun wollen wir „spezielle" Graphen studieren:

Motivation: Netzwerk $\rightsquigarrow$ Graph

Knoten: Informationen

Kanten: Austausch an Informationen

Ziel: „hochzusammenhänge" Graphen, die „dünn" sind (Anzahl der Kanten soll höchstens <u>linear</u> in Abh. von Knotenanzahl wachsen).

$\rightsquigarrow$ Schranke für die Anzahl der Kanten mit denen eine Ecke verbunden ist.

4. Definition

Sei $k \geq 2$. Ein Graph X heißt <u>k-regulär</u>, wenn für alle $v_i \in V$ gilt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = k$.

5. Bemerkung

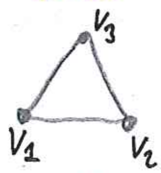
Wenn X keine Schleifen hat und einfach ist, bedeutet das, dass jeder Knoten aus X <u>genau</u> k-Nachbarn hat.

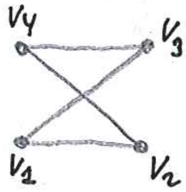
6. Beispiele

(i) Der Fall $k=1$ ist uninteressant, denn:

zus. 1-reg. Graphen

(ii) $k=2$





7. Definition

Sei $X = (V, E)$ ein Graph. Dann ist die Adjazenz-Matrix A von X symmetrisch. Aus LA wissen wir, dass symmetrische Matrizen diagonalisierbar sind: • reelle Eigenwerte

• Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

Das <u>Spektrum von A</u> ist die Menge der Eigenwerte von A, also:

$$\operatorname{Spek}(A) = \{\mu_0, \dots, \mu_{n-1}\} \text{ mit } \mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}.$$

8. Beispiel

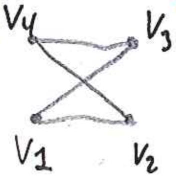
(i) 

2-regulär

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Beobachtung:

$\operatorname{Spek}(A) = \{2 \geq -1 \geq -1\}$

(ii) 

2-regulär

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{Spek}(A) = \{2 \geq 0 \geq 0 \geq -2\}$

Graph $\rightsquigarrow$ Adjazenz-Matrix $\rightsquigarrow$ Spektrum

9. Proposition

Sei $X=(V,E)$ ein k-regulärer Graph. Dann gilt:

(i) $\mu_0 = k$

(ii) $|\mu_i| \leq k$ für $1 \leq i \leq n-1$

(iii) Der Eigenraum zum Eigenwert μ_0 ist 1-dim. $\Leftrightarrow$ X ist zusammenhängend.

<u>Beweis:</u>

- Wir zeigen zuerst, dass k ein Eigenwert von A ist.
  Es gilt:
  $$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \end{pmatrix} \overset{k\text{-reg.}}{=} \begin{pmatrix} k \\ | \\ k \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Sei nun μ ein Eigenwert von A und $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zu μ.
  Wir müssen zeigen, dass gilt: $|\mu| \leq k$.

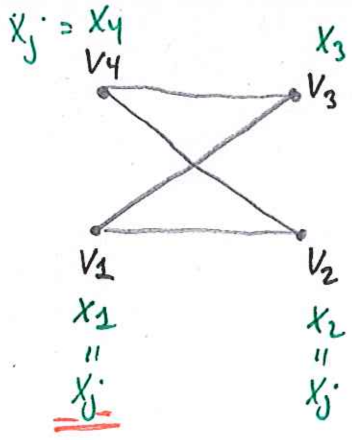
- Wir def: $|x_j| := \max \{ |x_i| \mid i = 1, \dots, n \}$.

- Wir können annehmen, dass $x_j > 0$ (denn wenn $x_j < 0$, dann betrachten wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$)

- Wir haben:
  $$k \cdot x_j \overset{k\text{-reg}}{=} \sum_{i=1}^n a_{ji} x_j \overset{x_j = \max\{\dots}{\geq} \sum_{i=1}^n a_{ji} |x_i| \overset{|a|\cdot|b| \geq |a \cdot b|}{\geq} \left| \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right| \overset{\mu\text{ EW}}{=} |\mu \cdot x_j| = |\mu| \cdot x_j$$

  $: x_j$
  $\Rightarrow k \geq |\mu|$.

Zu (iii):



Wir zeigen „$\Leftarrow$".

„$\Rightarrow$" ist ÜA.

Sei also X zusammenhängend.

z.z: $\mathrm{Eig}(\mu_0^{(i)} = k) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ein bel. Eigenvektor zum Eigenwert k.

Wir müssen also zeigen, dass gilt: $x_i = x_j$ für alle $1 \leq i,j \leq n$.

- Sei nun wieder $|x_j| := \max \{ |x_i| \mid i = 1, \dots, n \}$.

Wir haben:

$$k \cdot x_j = \left(A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \right)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i$$

$$= \underbrace{y_1 + \dots + y_k}_{k\text{-Faktoren}} \quad , \quad y_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$$

k-Faktoren, da $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} = k$

Weiter gilt: $|x_j| \geq |y_i| \quad i = 1, \dots, k$.

Folglich: $x_j = y_i \quad , i = 1, \dots, k$

Also: $x_i = x_j$ für $a_{ij} > 0$.

(Nun können wir $k \cdot x_1$ betrachten (siehe Beispiel oben) und zeigen, dass $x_3 = x_j$ ist).

Da X zusammenhängend ist, folgt $x_i = x_j$ für alle $1 \leq i,j \leq n$.

$\boxtimes$

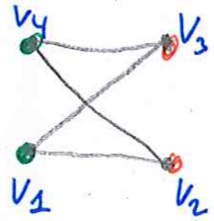
10. Definition

Ein Graph $X=(V,E)$ heißt <u>bipartit</u>, wenn eine Partition der Ecken $V = V_+ \sqcup V_-$ existiert, so dass für alle $\{v,w\} \subseteq V$ mit $a_{vw} \neq 0$ gilt:

$$v \in V_+ \Rightarrow w \in V_- \quad \text{oder}$$
$$v \in V_- \Rightarrow w \in V_+$$

<u>d.h.</u>: Die Ecken von X können wir in zwei Farben färben, so dass benachbarte Ecken <u>nicht</u> dieselbe Farbe haben.

11. Beispiel:



$V_+ = \{v_1, v_4\}$

$V_- = \{v_2, v_3\}$

$$\mathrm{Spek}(A) = \{ 2 \geq 0 \geq 0 \geq -2 \}$$

Beobachtung: symmetrische Eigenwerte

12. Proposition

Sei $X=(V,E)$ ein zus., k-regulärer Graph. Dann sind äquivalent:

(i) X ist bipartit

(ii) Wenn μ ein EW von A ist, dann ist $-\mu$ auch ein EW von A.
(d.h. das Spektrum von A ist symmetrisch über 0)

(iii) $\mu_{n-1} = -k$

<u>Beweis:</u>

$(i) \Rightarrow (ii)$

Sei $V = V_+ \sqcup V_-$ eine BiPartition von X.

Sei μ ein Eigenwert mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ von A.

<u>z.z</u>: $-\mu$ ist ein Eigenwert von A.

Wir definieren $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt:

$$y_i = \begin{cases} x_i\,, & \text{wenn } v_i \in V_+ \\ -x_i\,, & \text{wenn } v_i \in V_- \end{cases}$$

Dann gilt: $A\cdot y = -\mu\cdot y$

<u>Genauer:</u>

<u>1. Fall:</u> $y_i = x_i$

$$(A\cdot y)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot y_j = -\sum_{\substack{j\\ v_j\in V_+}} \overset{\overset{0 \text{ da } v_i\in V_+}{\|}}{a_{ij}}\cdot \overset{\overset{x_j}{\|}}{y_j} + \sum_{\substack{j\\ v_j\in V_-}} a_{ij}\cdot \overset{\overset{-x_j}{\|}}{y_j}$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j = -\mu x_i = -\mu y_i$$

<u>2. Fall:</u> $y_i = -x_i$ genauso.

Also ist $-\mu$ ein Eigenwert von A.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii):</u>

Prop. 9 $\Rightarrow \mu_0 = k \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mu_{n-1} = -k$.

<u>(iii) $\Rightarrow$ (i):</u>

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $-k$.

Sei weiter $|x_j| = \max\{|x_i| \mid i = 1,\dots,n\}$

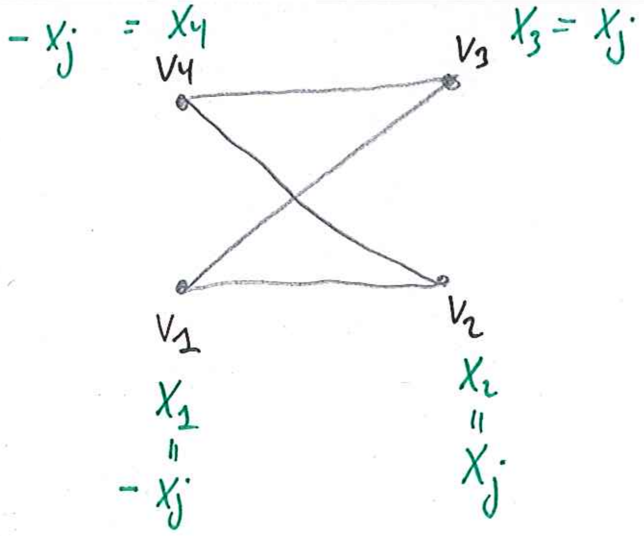
oBdA: $x_j > 0$ (sonst ersetze x durch $-x$)

Wir haben:

$$\underset{\overset{\|}{\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i}}{(A\cdot x)_j} = -k\cdot x_j$$

Mit dem selben Argument wie in Prop. 9 folgt:

$$\boxed{x_j = -x_i \text{ falls } a_{ij} > 0.}$$



Wir definieren:

$$V_+ = \{ v_i \in V \mid x_i > 0 \} \text{ und } V_- = \{ v_i \in V \mid x_i < 0 \}.$$

Das ist eine Partition, da X zus. ist. $\square$.

13. Definition / Beispiel:
Ein einfacher Graph $X = (V, E)$ ohne Schleifen heißt <u>vollständig</u>, wenn für alle $x, y \in V$, $x \neq y$ gilt: $\{x, y\} \in E$.
(Je zwei Ecken sind also benachbart).

Einen vollständigen Graphen mit n Ecken bezeichnen wir mit <u>K_n</u>.

K_2: 

K_3: 

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Spek}(A)_{K_n} = \{ n-1 \geq -1 \geq -1 \geq \dots \geq -1 \}$$

K_4: 

K_5: 

<u>Eigenschaften von K_n:</u>

- zusammenhängend
- $(n-1)$-regulär
- K_n ist bipartit $\overset{\text{Pr. 12}}{\iff}$ $n = 2$