Mi, 20.04.2016

Seminar: Gruppentheorie und Geometrie
Vortrag 2 (Lisa Schowe)

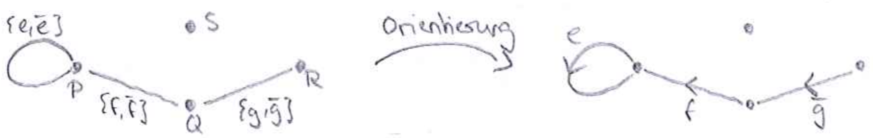
GRAPHEN UND BÄUME

§1 Graphen

Definition: Ein Graph Γ besteht aus:
- 2 Mengen: 1) V (Eckenmenge) (engl.: vertices)
  2) E (Kantenmenge) (engl.: edges)
- 2 Abbildungen: 1) $E \longrightarrow E$, $e \longmapsto \bar{e}$, mit $e \neq \bar{e}$, $\bar{\bar{e}} = e$
  2) $E \longrightarrow V \times V$, $e \longmapsto (e_0, e_1)$, mit $(\bar{e})_0 = e_1$, $(\bar{e})_1 = e_0$

⌜Idee: einer Kante wird Start- u. Zielpunkt zugeordnet.⌟

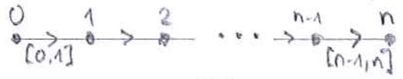
Beispiel:



⌜Graphen als Diagramm:⌝
- Ecken $\hat{=}$ Punkte
- Kanten $\hat{=}$ Linien zw. Punkten ⌟

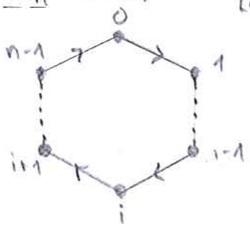
Definitionen:
- Orientierung von $\Gamma = (V, E)$: Teilmenge $E^+ \subseteq E$, sd. $E = E^+ \dot{\cup} \overline{E^+}$
- Ein Teilgraph $\Gamma' = (V', E')$ von $\Gamma = (V, E)$ ist ein Graph mit: $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$.
- Ein Morphismus von Graphen ist eine Abb. $\varphi: \begin{Bmatrix} V' \to V \\ E' \to E \end{Bmatrix}$ zwischen zwei Graphen Γ', Γ so, dass $\varphi(\bar{e}) = \overline{\varphi(e)}$, $\varphi(e_0) = \varphi(e)_0$, $\varphi(e_1) = \varphi(e)_1$

Spezialfälle: 1) $Path_n$ $(n \geq 0)$:



$V = \{0, \dots, n\}$
$E^+ = \{[i-1, i] \mid i = 1, \dots, n\}$

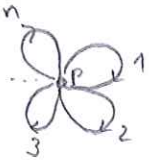
2) $Circ_n$:



$V = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$E^+ = \{[i, i+1] \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$

3) R_n (Rose mit n Blättern): $V = \{p\}$, $E^+ = \{1, \dots, n\}$



$Path_n$ und $Circ_n$ führen uns zu zwei weiteren Definitionen:

Definition: Ein Kantenweg (der Länge n) in Γ ist das Bild eines Morphismus $\varphi: Path_n \longrightarrow \Gamma$. ⌜Idee: Folge von Kanten $(u_1, \dots, u_n)$ mit $u_i = \varphi([i-1, i])$ und $(u_i)_1 = (u_{i+1})_0$ ⌟

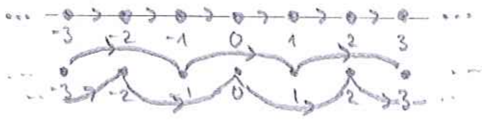
Ein Kantenweg heißt reduziert, wenn $e_{i+1} \neq \bar{e}_i$ (kein "backtracking").

Bemerkung: Wenn ein Kantenweg zwischen zwei Ecken existiert, dann immer auch ein reduzierter. ($\rightsquigarrow$ "kürzen")

Definition: Ein Kreis (der Länge n) ist ein zu $Circ_n$ isomorpher (Teil-)graph.

Definition: Der orientierte Cayleygraph $\Gamma(G,S)$ (Gruppe G, $S \subseteq G$ Teilmenge) ist der Graph mit Ecken $V = G$ und $E^+ = \{(g, gs) \mid g \in G, s \in S\}$

Beispiele: 1) $G = \mathbb{Z}$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$



2) $G = \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, $S = \{1\}$ $\rightsquigarrow$ $\Gamma(G,S) \cong \mathrm{Circ}_n$

Bemerkung: G wirkt durch Linksmultiplikation auf $\Gamma(G,S)$: $V \to V$, $a \mapsto ga$; $E^+ \to E^+$, $(a, as) \mapsto (ga, gas)$

Proposition: a) $\Gamma(G,S)$ enthält  $\iff$ $1_G \in S$

b) $\Gamma(G,S)$ enthält  $\iff$ $\{s, s^{-1}\} \subseteq S$

c) $\Gamma(G,S)$ zusammenhängend $\iff$ $\langle S \rangle = G$

Bemerkung: $\Gamma = (V,E)$ zusammenhängend $:\iff$ für jedes Paar $(u,v) \in V \times V$ ex. ein Kantenweg von u nach v.

Die (bzgl. „$\subseteq$") maximalen zusammenhängenden Teilgraphen heißen Zusammenhangskomponenten. [Bsp. oben: $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2\})$ hat 2 Zusammenhangskomp.]

Bew. der Prop: a) + b) durch kurze Überlegung.

c): Sei $g \in G$.

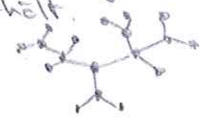
Γ zshgd. $\Rightarrow$ 1_G und g verbunden durch Kantenweg endlicher Länge n

$\Rightarrow$ $g = 1_G s_1 \cdots s_n$, $s_1, \dots, s_n \in S \cup S^{-1}$ $\Rightarrow$ $G = \langle S \rangle$.

In obiger Kette gilt jeweils auch die Umkehrung. $\square$

§ 2 Bäume

Definition: Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph Γ, der keine Kreise als Teilgraphen enthält.

Beispiele: i) Path_n ii) 

Proposition: Für zwei Ecken $u, v \in V$ in einem Baum $\Gamma = (V,E)$ existiert genau ein reduzierter Kantenweg von u nach v.

Beweis: Existenz: ✓ (da Γ per Def. zshgd.)

Eindeutigkeit: Seien $(y_1, \dots, y_n)$, $(w_1, \dots, w_m)$ red. Kantenwege von u nach v.

Dann gilt $y_n = w_m$, denn sonst wäre $(y_1, \dots, y_n, \bar{w}_m, \dots, \bar{w}_1)$ ein Kantenweg von u nach u. (enthielte Kreis).

Induktiv: $n = m$ und $y_i = w_i$ $i = 1, \dots, n$ $\square$

Bemerkung: Durch die Länge des eind. red. Kantenweges erhalten wir einen Abstandsbegriff.

Definition: Sei $\Gamma = (V,E)$ ein Baum, $V' \subseteq V$. Der von V' erzeugte Teilbaum Γ' ist der Baum, der alle Ecken und Kanten enthält, die entlang reduzierter Kantenwege mit Anfangs- und Endpunkt in V' liegen.

⌜Exkurs: Geometrische Realisierung $|\Gamma|$ eines Graphen Γ (Graph als top. Raum auffassen)

Konstruktion: Sei $\Gamma = (V,E)$ ein Graph, $E^+ \subseteq E$ Orientierung.

Setze $|\Gamma| := V \amalg E^+ \times [0,1] \big/ \sim$, wobei $z \sim z \quad \forall z \in V$
$(e,0) \sim e_0, \quad (e,1) \sim e_1$

Topologie auf $|\Gamma|$: diskrete Top. auf V, E^+ und Quotiententopologie.

⌞Bem: $|\Gamma|$ hängt nicht von der Wahl von E^+ ab.

Satz: Sei $\Gamma = (V,E)$ ein Baum. Dann ist $|\Gamma|$ kontrahierbar.

⌜Bem: Es handelt sich sogar um eine Äquivalenz von Aussagen!⌟

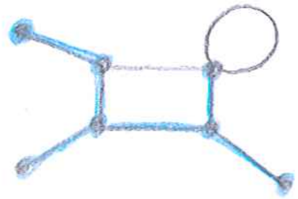
Beweis (-idee): Seien $u, v \in V$. Der von $\{u,v\}$ erzeugte Teilbaum $\Gamma'(\{u,v\})$ ist isomorph zu Path_n (für ein $n \in \mathbb{N}$). Identifiziere u mit 0 in Path_n:
$|\Gamma'(\{u,v\})| \cong [0,n]$ und $[0,n]$ ist kontrahierbar.
Γ ist die Vereinigung von solchen Teilbäumen $\Gamma'(\{u,v\})$, $v \in V$.
$|\Gamma|$ " " " " Teilräumen $|\Gamma'(\{u,v\})|$.
Da alle $|\Gamma'|$ kontrahierbar auf den Punkt u und diese Kontraktionen verträglich sind, folgt, dass $|\Gamma|$ kontrahierbar. □

§ 3 Teilbäume von Graphen

Satz + Def.: Sei $\Gamma = (V,E)$ ein zusammenhängender Graph. Dann besitzt dieser einen (bzgl. „$\subseteq$") maximalen Teilbaum Δ, der alle Ecken von Γ enthält.
Diesen nennen wir einen Spannbaum.

Beweis: Ein maximaler Teilbaum existiert nach dem Lemma von Zorn.
A: $\exists u \in V$ mit $u \notin \Delta \xRightarrow{\Gamma \text{ zshd}} \exists e \in E$ mit $e_0 \in \Delta$, $u = e_1 \notin \Delta$.
Konstruiere neuen Baum Δ' durch Zufügen von e und u ↯ zur Maximalität von Δ. □
Das ist wieder ein Baum!

Beispiel:



⌜Bem.: i.A. gibt es viele Spannbäume!⌟

Satz: Sei $\Gamma = (V,E)$ ein zusammenhängender Graph, $\# V < \infty$. Dann gilt:
$\# E^+ \geq \# V - 1$. Mit: „$=$" $\Leftrightarrow$ Γ ist Baum.

Beweisskizze: i) Sei zunächst Γ ein Baum.
Für einen Baum mit 1 Ecke (0 Kanten) stimmt die Behauptung.
Das Zufügen einer Ecke entspricht dem Zufügen einer orientierten Kante. $\rightsquigarrow \# E^+ = \# V - 1$

ii) Sei nun Γ ein Graph mit Spannbaum Δ.
Dann gilt: $\# V(\Gamma) = \# V(\Delta)$, $\# E^+(\Gamma) \geq \# E^+(\Delta) \rightsquigarrow \# E^+(\Gamma) \geq \# E^+(\Delta) = \# V(\Gamma) - 1$

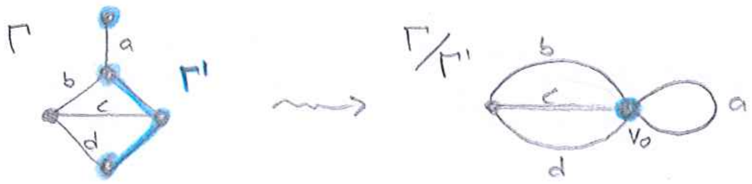
iii) Fehlt noch: „$\# E^+ = \# V - 1 \Rightarrow \Gamma$ ist Baum":
Dann gilt aber bereits $\# E^+(\Gamma) = \# E^+(\Delta)$ für Spannbaum Δ (siehe ii)),
und somit $\Gamma = \Delta \rightsquigarrow \Gamma$ ist Baum. □

Konstruktion: Sei $\Gamma' \subseteq \Gamma$ (nicht notwendig Teilgraph!)

Definiere einen Graph $\Gamma/_{\Gamma'}$ so, dass $|\Gamma/_{\Gamma'}| \cong |\Gamma|/_{|\Gamma'|}$,

d.h. wir identifizieren Γ' mit einem Punkt in Γ.

Beispiel:



Idee: Kanten in $\Gamma/_{\Gamma'}$: Kanten von Γ, die nicht in Γ'

Ecken in $\Gamma/_{\Gamma'}$: Ecken von Γ, die nicht in Γ'

+ eine neue Ecke (v_0), in der alle Kanten enden, die vorher in Γ' endeten.

Satz: Sei Γ' ein Teilbaum von Γ. Dann ist die Projektion $|\Gamma| \longrightarrow |\Gamma/_{\Gamma'}|$ eine Homotopieäquivalenz.

Bem.: Für den Beweis benötigen wir mehr "topologisches Werkzeug".
Bei Interesse: z.B.: - Vorl. GGT (letztes Semester), § 6.5, 6.6.
- Serre, trees: §2, Prop. 13

Korollar: Jeder zusammenhängende Graph ist homotopieäquivalent zu einer Rose.

Beweisidee: Wähle Spannbaum Δ von Γ.

Dann hat $\Gamma/_{\Delta}$ eine Ecke und die orientierten Kanten entsprechen $\{e \in E^+ \mid e \text{ nicht in } \Delta\}$.