Freie Gruppen und Bäume

Ziel: Satz von Schreier: Untergruppen von freien Gruppen sind frei

Dazu: Betrachte Wirkungen von Gruppen auf Graphen.

<u>Definition</u>: Sei G eine Gruppe, $X=(V,E)$ ein Graph.
G wirke auf V und E (d.h. $g\cdot h(x)=g(h(x))$, $1(x)=x$) und $g(e_0)=g(e)_0$, $g(e_1)=g(e)_1$, $g(\bar{e})=\overline{g(e)}$ gelte für jedes $g\in G$, $e\in E$.
Dann wirkt G auf den Graphen. Für jedes $g\in G$ ist dies also ein Graphenmorphismus $X\to X$.
Die Wirkung heißt <u>inversionsfrei</u>, wenn $g(e)\neq\bar{e}$ für alle $g\in G$, $e\in E$.
Dann: Quotientengraph $G\backslash X=(G(V),G(E))$
wobei $G(V)=\{G(v)\mid v\in V\}$, $G(E)=\{G(e)\mid e\in E\}$ und
$G(e)_0:=G(e_0)$, $G(e)_1:=G(e_1)$ und $\overline{G(e)}:=G(\bar{e})$
Inversionsfreiheit stellt sicher, dass das ein Graph ist!

<u>Lemma</u>: Sei X ein zush. Graph, G Gruppe, die inversionsfrei auf X wirkt, sei T' Teilbaum in $G\backslash X$.
Dann lässt sich T' zu einem Teilbaum T_0 in X liften, d.h. bzgl. $\begin{Bmatrix} v\mapsto G(v) \\ e\mapsto G(e)\end{Bmatrix}$ ist T_0 isomorph zu T'.

<u>Beweisidee</u>: $\Omega=\{T$ Teilbaum in X, der injektiv nach T' abgebildet wird$\}$

1. Zeige mit Zorns Lemma, dass es in Ω ein maximales Element T_0 gibt
2. T_0 ist bereits Lift zu T' durch Widerspruch:

Angenommen, es gibt eine Kante in T', die nicht im Bild von T_0 liegt $\rightsquigarrow$ Konstruiere größeres Element in Ω als T_0. $\square$

Ein Lift eines maximalen Baums in $G\backslash X$ heißt <u>Repräsentantenbaum</u> von $G\backslash X$.

Erinnerung: Cayleygraph $\Gamma(G,S)$ Eckmenge G

Orientierung: $\{(g,gs) \mid g \in G, s \in S\}$, $(g,gs)_0 = g$, $(g,gs)_1 = gs$

<u>Lemma</u>: Sei S Teilmenge einer Gruppe G.

Dann ist G frei mit Basis S genau dann, wenn $\Gamma(G,S)$ ein Baum ist.

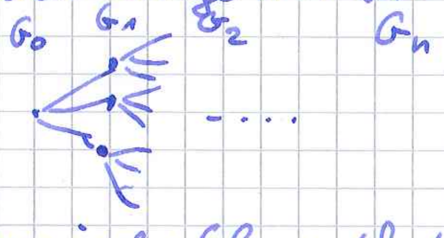
<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$" Jedes $g \in G$ hat eindeutige Darstellung

$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n}$, $s_i \in S$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i$, falls $s_{i+1} = s_i$

Nenne n die Länge von g.

Sei G_n die Menge aller Elemente der Länge n für $n \in \mathbb{N}$

Ist g wie oben mit Länge n, dann ist g mit genau einem Element der Länge $n-1$ verbunden, nämlich $s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$

$\Gamma(G,S)$: 

$\rightsquigarrow$ keine Kreise

Außerdem: jedes Element hat Kantenweg zu $1 \rightsquigarrow$ zush. $\rightsquigarrow$ Baum

„$\Leftarrow$" • $S \cap S^{-1} = \emptyset$, da $\Gamma(G,S)$ Baum

• S erzeugt G, da $\Gamma(G,S)$ zush.

Angenommen, $F(S) \not\cong G$

Betrachte die Projektion $\varphi: F(S) \to G$. Das ist ein surjektiver Homom, also nach Annahme nicht injektiv.

Sei $\hat{g} \in F(S)$ ein Element minimaler Länge mit $\hat{g} \neq 1$ und $\varphi(\hat{g}) = 1$

Schreibe $\hat{g} = g_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{\varepsilon_n}$

Wegen $S \cap S^{-1} = \emptyset$ folgt $n \geq 3$

Sei $P_i = \varphi(g_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot g_i^{\varepsilon_i})$, $P_0 = 1$

Wegen der Minimalität von $\hat{g}$ gilt $P_i \neq P_j$ für $1 \leq i < j \leq n-1$

Außerdem sind P_i und P_{i+1} im Cayleygraphen jeweils durch eine Kante verbunden und $P_0 = P_n$.

Wegen $n \geq 3$ bilden $\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$ einen Kreis in $\Gamma(G,S)$ $\lightning$

$\square$

Definition: Sei G eine Gruppe, die inversionsfrei auf einem Graphen $X = (V, E)$ wirkt. Die Wirkung heißt frei, wenn für jedes $g \in G$, $g \neq 1$ und $v \in V$ gilt: $g(v) \neq v$

Korollar: Sei G eine freie Gruppe. Dann gibt es einen Baum, auf dem G frei wirkt.

Beweis: Nehme $S \subseteq G$ Basis und betrachte als Wirkung die Linksmultiplikation auf $\Gamma(G, S)$. Weil G frei ist, ist diese Wirkung frei und nach dem Lemma ist $\Gamma(G, S)$ ein Baum $\square$

~~Auch~~ die Umkehrung ist richtig!

Satz: Eine Gruppe, die frei auf einem Baum wirkt, ist frei.

Genauer:

Sei G eine Gruppe, die frei auf einem Baum $X = (V, E)$ wirkt. Sei T ein Repräsentantenbaum von X mod G, E^+ eine Orientierung in X, die unter der Wirkung invariant ist (die gibt es wegen der Inversionsfreiheit)

a) Sei S die Menge aller Elemente $1 \neq g \in G$, zu denen es $e \in E^+$ mit $e_0 \in T$ und $e_1 \in g(T)$ gibt.

Dann ist G frei mit Basis S

b) Gilt $\#G(V) = s < \infty$ und $\#G(E) = 2a < \infty$, so gilt $\#S - 1 = a - s$

Korollar (Schreier): Sei G eine freie Gruppe und $H \leq G$ UG.

a) Dann ist auch H eine freie Gruppe.

b) Gilt $[G : H] = n < \infty$ und $G \cong F_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so folgt $H \cong F_{n(k-1)+1}$

Beweis: a) G wirkt frei auf einem Baum, also wirkt auch H frei auf diesem Baum. Nach dem Satz ist H frei.

b) Sei $S \subseteq G$ eine Basis.

Betrachte die Wirkung von H auf $\Gamma(G,S)$

$G \backslash \Gamma(G,S) = (V, E)$

Es gibt genauso viele H-Bahnen von Elementen in g wie Rechtsnebenklassen, also $\# V = n$

Nach Definition des Cayleygraphen und der freien Gruppe gibt es zu jeder Ecke genau $2k$ Kanten, also $\# E = 2 \cdot k \cdot n$

Nach dem Satz gilt: $m - 1 = k \cdot n - n$, wobei m die Länge einer Basis in H ist

$\Rightarrow m = n(k-1) + 1$ $\square$

<u>Satz</u>: Sei G eine frei Gruppe mit Basis S, sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe

a) Es gibt ein vollständiges Repräsentantensystem $T \subseteq G$ bzgl. ${}_H\backslash G$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $t \in T$, $t = s_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot s_n^{\varepsilon_n}$, wobei $s_i \in S$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$

$\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, falls $s_i = s_{i+1}$

so gilt: alle partiellen Produkte $1, s_1^{\varepsilon_1}, s_1^{\varepsilon_1} \cdot s_2^{\varepsilon_2}, \ldots, t$ liegen in T

b) Sei T wie in a) sei $W = \{(t,s) \in T \times S \mid ts \notin T\}$

Für $(t,s) \in W$ sei $u \in T$, sodass $H \cdot ts = Hu$, sei $h_{t,s} = tsu^{-1}$

Dann ist $R = \{h_{t,s} \mid (t,s) \in W\}$ eine Basis von H

<u>Beispiel</u>: $G = F_2 = F(\{x,y\})$

$\varphi: x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n} \longmapsto \left(\sum_{x_i = x} k_i, \sum_{x_i = y} k_i\right)$ (mit $x_i \in \{x,y\}$)

$G \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

sei die Projektion. Das ist ein Epimorphismus

Sei $H := \ker \varphi$

$\Rightarrow [G:H] = \#(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 4$

Nach Schreier gilt $H \cong F_{4(2-1)+1} = F_5$

Finde eine Basis!

$T = \{1, x, y, xy\}$, $S = \{x, y\}$

$W = \{(x,x), (y,x), (y,y), (xy,x), (xy,y)\}$

$Hts = Hu \Leftrightarrow ts = h \cdot u$ für ein $h \in H$

$\Leftrightarrow tsu^{-1} = h$ für ein $h \in H$

Für t und s suche u also so, dass $tsu^{-1} \in H$

$h_{xx} = x^2 \cdot 1 = x^2$

$h_{y,x} = yx(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$

$h_{y,y} = y^2 \cdot 1 = y^2$

$h_{xy,x} = xyx \cdot y^{-1} = xyxy^{-1}$

$h_{xy,y} = xyy \cdot x^{-1} = xy^2x^{-1}$

$\Rightarrow R = \{x^2, yxy^{-1}x^{-1}, y^2, xyxy^{-1}, xy^2x^{-1}\}$ ist eine Basis von H.