Westfälische-Wilhelms Universität Münster
Mathematisches Institut
Sommersemester 2016

Die Adjazenz-Matrix und ihr Spektrum, sowie Ungleichungen den Spektralen Lücken

Eine Vortragsausarbeitung im Seminar:

Seminar Gruppentheorie und Geometrie: Gruppen, Expandergraphen und Bäume

Sommersemester 2016

Dozenten:

Prof. Dr. Linus Kramer

Dr. Olga Varghese

Studentin: Jacqueline Müller
j_muel46@uni-muenster.de
Matrikelnummer: 405193
6. Fachsemester

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dies ist eine Ausarbeitung für einen Vortrag im Rahmen des Seminars „Seminar Gruppentheorie und Geometrie: Gruppen, Expandergraphen und Bäume. Der gesamte Seminarvortrag beruht auf den ersten beiden Kapitel des Buches „Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs" von Giuliana Davidoff, Peter Sarnak und Alain Valette[1]. In diesen Kapiteln „The Adjazenz Matrix and it's spektrum" und „Inequalities on the spectral gap" werden Graphen mit Matrizen in Verbindung gebracht, um deren Eigenschaften genauer zu studieren und die Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften der Graphen und ihren zugehörigen Matrizen aufzuzeigen. Nachdem in dem Seminar mit Hilfe des Buches „Trees" von J.P. Serre bisher Amalgame, Gruppen, Gruppenwirkungen auf Graphen, sowie das Strukturtheorem und Fixpunkte behandelt wurden, soll es nun um Graphentheorie gehen, bei der ein Schwerpunkt auf die Adjazenz-Matrix und ihre Eigenschaften eingegangen werden und wie diese mit den Graphen zusammenhängen.

Im ersten Teil dieser Ausarbeitung wird zunächst die Adjazenz-Matrix eingeführt und verschiedene ihrer Eigenschaften aufgezeigt, dabei geht es vor allem immer um die Möglichkeit zu zeigen, wie viele benachbarten Ecken es innerhalb eines Graphen gibt und was die Eigenwerte, im Folgenden Spektrum genannt, über den Graphen aussagen können. Im zweiten Kapitel soll es dann um die Ungleichungen der Spektralen Lücken gehen. Dabei werden vor allem die Expander-Konstante und die daraus resultierende Ungleichung zur Charakterisierung der Qualität der Familie von Expander Graphen eine Rolle spielen.

1. Kapitel: Die Adjazenz Matrix und ihr Spektrum

1.1 Definition

Gegeben sei ein Graph X=(V,E) – V die Menge der Ecken und E die Menge der Kanten- mit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1$. Wir definieren die Adjazenz-Matrix als Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$ mit a_{ij} Anzahl der Kanten, die v_i mit v_j verbinden.

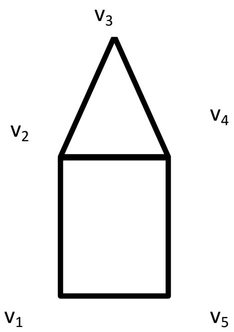
1.2 Bemerkung

A fasst X komplett auf ist symmetrisch, wenn X ein ungerichteter Graph ist, d.h. wenn $(v_i, v_j) \in E$ ist, dann ist auch $(v_j, v_i) \in E$.

Ist X gerichtet, so ist A in der Regel nicht symmetrisch.

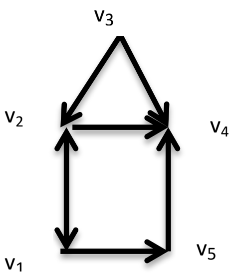
1.3 Beispiel

1.) X ungerichtet



$$\Rightarrow \mathbf{A=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.) X gerichtet



$$\Rightarrow \mathbf{A=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4 Definition

Gegeben sei ein ungerichteter Graph X=(V,E) mit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1$ und $A = \left(a_{ij}\right)$ die zugehörige Adjazenz-Matrix. Wir nennen X einfach genau dann, wenn $a_{ij} \in \{0,1\}\ \forall v_i, v_j$ ist, d.h für zwei Ecken gibt es höchstens eine Kante, die diese verbindet.

1.5 Korollar

X=(V, E) ist genau dann ein Graph ohne Schlaufen, wenn $a_{ii} = 0 \; \forall v_i \in V$.

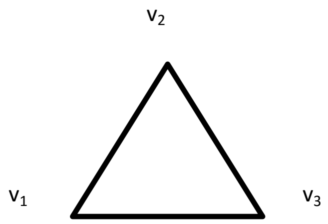
1.6Definition

Gegeben sei ein ungerichteter Graph X=(V,E) mit $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, n \geq 1$. Sei $k \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$.

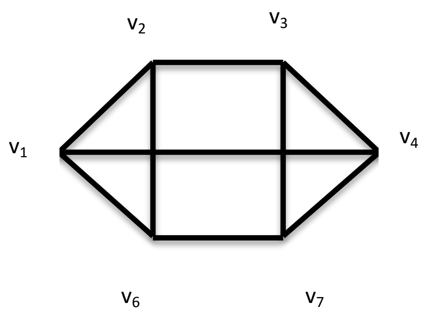
Der Graph X=(V, E) heißt k-regulär, wenn für alle $v_i \in V$: $\sum_{v_j \in V} a_{ij} = k$.

Diese Definition soll durch das folgende Beispiel genauer erklärt werden. Bei k-regulären Graphen gibt es immer mehrere Möglichkeiten, um diese umzusetzen. Die Beispiele, die im Folgenden aufgeführt sind, sind also nur eine Umsetzungsmöglichkeit von vielen.

1.7 Beispiel



2-reguärer Graph



3-regulärer Graph

1.8 Folgerung

Ist X=(V, E) ein einfacher k-regulärer Graph ohne Schlaufen, so hat jede Ecke genau k Nachbarn.

Wenn X=(V, E) ein endlicher Graph mit n Knoten ist, dann ist A eine symmetrische nxn-Matrix, also eine Matrix mit n reellen Eigenwerten (mit Vielfachheit gezählt), die wir in absteigender Reihenfolge auflisten können: $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_{n-1}$.

1.9 Definition

Gegeben sei ein ungerichteter Graph X=(V,E) mit V=$\{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 1$ und A=(a_{ij}). Wir definieren das Spektrum von X als die Menge der Eigenwerte von A.

Beachte: μ_0 ist genau dann ein einfacher Eigenwert, wenn $\mu_0 > \mu_1$.

Sei X=(V, E) ein beliebiger Graph, dann betrachten wir die Funktionen f: $V \to \mathbb{C}$ und definieren $l^2(V)=\{f: V \to \mathbb{C}: \sum_{v\in V}|f(v)|^2 < +\infty\}$. Analog dazu kann man $l^2(E)$ definieren.

1.10 Bemerkung

Ist V endlich, also |V|=n, dann ist jede Funktion f: $V \to \mathbb{C}$ in $l^2(V)$. Jede dieser Funktionen kann man sich als Vektor in $\mathbb{C}^n$ vorstellen und darauf verhält sich die Adjazenz-Matrix wie üblich:

$$Af = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}f(v_1) + & \cdots & +A_{1n}f(v_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1}f(v_1) + & \cdots & +A_{nn}f(v_n) \end{pmatrix}$$

Also $(Af)(v_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} f(v_j)$.

Es ist aber insgesamt geeigneter die Nummerierung der Ecken zu vergessen und stattdessen die Matrix-Einträge von A direkt einzuteilen zu einem Paar aus Ecken. Wir können also A durch eine Matrix $\left(A_{xy}\right)_{x,y\in V}$repräsentieren und erhalten $(Af)(x) = \sum_{y\in V} A_{xy} f(y)$ für alle $x \in V$.

1.11 Proposition

Sei X=(V, E) ein endlicher, k-regulärer Graph mit n Ecken, dann gilt:

a) μ_0=k

b) $|\mu_i| \leq$ k für $1\leq i \leq$ n-1

c) μ_0 hat Vielfachheit 1 ⇔ X ist zusammenhängend.

<u>Beweis:</u> Wir prüfen a) und b) gleichzeitig, indem wir feststellen, dass die konstante Funktion f ≡ 1 in V eine Eigenfunktion von A ist und mit dem Eigenwert k assoziiert.

Als nächstes beweisen wir, dass wenn μ ein beliebiger Eigenwert von A ist, $|\mu| \leq$ k ist.

Sei f dazu eine reell wertige Eigenfunktion die mit μ assoziiert. Sei x∈V so, dass $|f(x)| = \max_{y\in V} |f(y)|$. Wir ersetzten f durch –f, wenn notwendig, dann ist f(x) > 0. Es folgt

$f(x)|\mu| = |f(x)\mu| = |\sum_{y\in V} A_{xy} f(y)| \leq \sum_{y\in V} A_{xy}|f(y)| \leq f(x) \sum_{y\in V} A_{xy} = f(x)k$

Durch rausstreichen von $f(x)$ erhalten wir das Ergebnis.

Für c) wird im Folgenden nur die Rückrichtung bewiesen. Es sei also X zusammenhängend. Sei f eine reell wertige Eigenfunktion welche mit k assoziiert. Um die Behauptung zu beweisen, muss gezeigt werden, dass f konstant ist.

Sei wie zuvor x∈V mit $|f(x)|=\max_{y\in V}|f(y)|$. Da $f(x) = \frac{(Af)(x)}{k} = \sum_{y\in V} \frac{A_{xy}}{k} f(y)$, kann man sehen, dass $f(x)$ eine Konvexkombination von reellen Zahlen ist, die im Betrag kleiner ist als $|f(x)|$. Daraus folgt, dass $f(x) = f(y)$ ist für alle y∈V derart, dass für $A_{xy}\neq 0$ für alle benachbarten x und y ist.
Wegen des gleichen Arguments folgt, dass f den gleichen Wert auf f(x) hat, wenn wir eine benachbarte Ecke zu so einem y haben, usw.
Also, wenn X=(V,E) zusammenhängend ist, dann ist f konstant. ∎

Proposition 1.11 c) ist die erste Verbindung zwischen den Eigenschaften des Spektrums der Adjazenz-Matrix und den kombinatorischen Eigenschaften des Graphen.

1.12 Definition
Ein Graph X=(V, E) heißt <u>bipartit</u>, wenn eine Partition $V = V_+ \cup V_-$ existiert, so dass für zwei beliebige Ecken x und y mit $A_{xy}\neq 0$ auf $x\in V_+$ stets folgt $y\in V_-$ (oder umgekehrt).

Mit anderen Worten: Es ist möglich die Ecken in zwei Farben zu färben, sodass zwei benachbarte Ecken nicht dieselbe Farbe haben.
Im Folgenden sollen die besonderen Spektraleigenschaften zweiteiliger Graphen charakterisiert werden.

1.13 Proposition
Sei X=(V, E) ein zusammenhängender, k-regulärer Graph mit n Knoten. Dann sind äquivalent:

a) X ist zweiteilig,
b) Das Spektrum von X ist symmetrisch zu 0,
c) $\mu_{n-1} = -k$.

Die Symmetrie über 0 meint dabei die Punktsymmetrie, d.h. wenn der größte Eigenwert k ist, so ist der kleinste Eigenwert –k. Zudem wird jeder Eigenwert, wenn er im positiven angenommen wird, auch im negativen angenommen, oder umgekehrt.

<u>Beweis:</u>
a)⇒b): Wir nehmen an, dass $V = V_+ \cup V_-$ eine Partition von X ist. Um zu zeigen, dass das Spektrum von X symmetrisch über 0 ist, nehmen wir an, dass f eine Eigenfunktion von A ist, die mit dem Eigenwert μ assoziiert. Wir definieren

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in V_+ \\ -f(x), & x \in V_- \end{cases}$$

Daraus folgt direkt, dass (Ag)(x)= −μg(x) ∀x∈V ist und damit die Symmetrie. <u>b)⇒c):</u> Folgt direkt aus der Proposition 1.11, denn dort wurde gezeigt, dass $\mu_0 = k$ ist und wenn der Graph X bipartit ist, folgt direkt, dass der kleinste Eigenwert –k ist.

<u>c)⇒a):</u> Sei f eine reell wertige Eigenfunktion von A mit Eigenwert –k und sei x∈V so, dass $|f(x)| = \max_{y \in V} |f(y)|$. Wenn notwendig, ersetzen wir f durch –f, sodass wir annehmen können, dass f(x)>0 ist. Also

$$f(x) = -\frac{(Af)(x)}{k} = -\sum_{y \in V} \frac{A_{xy}}{k} f(y) = \sum_{y \in V} \frac{A_{xy}}{k} (-f(y))$$

Somit ist f(x) eine Konvexkombination der (-f(y)), welche im Betrag kleiner sind als |f(x)|. Daher ist –f(y) = f(x) ∀x∈V, sodass $A_{xy} \neq 0$ für alle benachbarten x und y. Ebenso, wenn z eine benachbarte Ecke von y ist, ist f(z)= –f(y) = f(x). Definiere V_+= {y∈V : f(y)>0} und V_- = {y∈V : f(y)<0}. Da X=(V, E) ein zusammenhängender Graph ist, ist dies eine Definition für eine Zweiteilung. ■

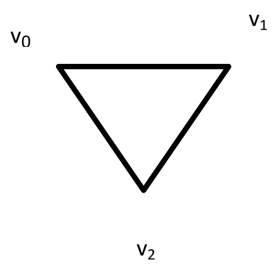
Somit hat jeder endliche, zusammenhängende, k-reguläre Graph X=(V, E) als größten positiven Eigenwert μ_0=k. Ist dieser Graph zusätzlich zweiteilig, dann ist der Eigenwert μ_{n-1}= −k (und das auch nur in diesem Fall).

1.14 Beispiel

Um die Eigenschaften, welche zuvor für die Adjazenz-Matrix eines Graphen eingeführt wurden, sollen jetzt an dem kompletten Graphen K_n veranschaulicht werden. Der komplette K_n ist ein Graph mit n Ecken, bei dem jede Ecke mit allen anderen Ecken verbunden ist. Betrachte dazu die nachfolgen Grafiken für n=2,...,4:

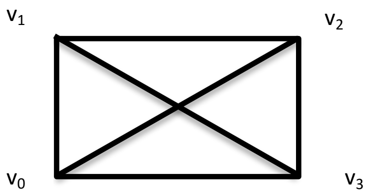
K_2: 

$$A_{K_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_3: 

$$A_{K_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

K_4:



$$A_{K_4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Offensichtlich ist $A_{K_n} = J_n - I_n$, wobei J_n die $n \times n$-Matrix ist, die als Einträge nur Einsen hat und I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix ist. Sei μ ein Eigenwert von J_n mit zugehörigem Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n$: $A_{K_n}x = (J_n - I_n)x = J_n x - I_n x = \mu x - x = (\mu - 1)x$. Also ist zu jedem Eigenwert μ von J_n der Wert $\mu - 1$ ein Eigenwert von K_n mit gleicher Vielfachheit. Es gilt zudem, dass $rang(J_n) = 1$ ist und daraus folgt, dass J_n nur einen von 0 verschiedenen Eigenwert gibt, nämlich $\mu_n = n$ mit dem zugehörigen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^n$, der nur Einsen enthält. J_n hat somit die Eigenwerte $\mu_n = n$ und $\mu_{n-1} = \cdots = \mu_1 = 0$ und somit hat A_{K_n} die Eigenwerte $\mu_0 = n - 1$ und $\mu_{n-1} = \cdots = \mu_1 = -1$.
K_n ist offensichtlich nur für n=2 bipartit und sonst nicht. ■

Die letzte Definition, die an dieser Stelle eingeführt wird, soll einen Ausblick auf das zweite Kapitel geben. Nachdem mit der letzten Partition gezeigt wurde

1.15 Definition
Sei X=(V, E) ein endlicher, zusammenhängender, k-regulärer, bipartiter Graph. Die Eigenwerte k und –k, heißen <u>triviale Eigenwerte</u> von X. Die Differenz $k - \mu_1 = \mu_0 - \mu_1$ heißt <u>Spektrale Lücke</u> von X.

2. Kapitel: Ungleichungen der Spektralen Lücken

2.1 Definition

Sei X=(V, E) ein Graph und F⊆V Teilmenge. Wir definieren den Rand ∂F als die Menge der Kanten mit einem Extremum in F und dem anderen in V\F. Mit anderen Worten: ∂F ist die Menge der Kanten die F mit V\F verbindet. Wir stellen fest, dass ∂F=∂(V\F) ist.

Stellt man sich X als Netzwerk zur Informationsverbreitung vor, bei dem von jeder Ecke ausgehen Informationen zu anderen Ecken geschickt werden, dann soll die Qualität dieses Netzwerkes geprüft werden. Dabei hilft die folgende Konstante:

2.2 Definition

Die Expander Konstante des Graphen X=(V, E) ist definiert als:

$$h(x) = inf\left\{\frac{|\partial \mathrm{F}|}{\min\{|F|,|V-F|\}} : F \subseteq V, 0 < |F| < +\infty\right\}.$$

Wenn X endlich mit n Knoten ist, dann ist:

$$h(x) = min\left\{\frac{|\partial \mathrm{F}|}{|F|} : F \subseteq V, 0 < |F| < \frac{n}{2}\right\}.$$

Je größer die Expander Konstante ist, desto besser ist die „Qualität" von X als Netzwerk.

2.3 Definition

Sei $(X_m)_{m\geq 1}$ eine Familie von endlichen, zusammenhängenden, k-regulären Graphen mit $\lim_{m\to+\infty}|X_m| \to +\infty$. Wir sagen $(X_m)_{m\geq 1}$ ist eine Familie von Expandergraphen, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $h(X_m) \geq \varepsilon$ ∀m≥1.

2.4 Theorem

Sei X=(V, E) ein endlicher, zusammenhängender, k-regulärer Graph ohne Schlaufen, also ein Baum. Sei μ_1 der erste, nicht triviale, Eigenwert von X. Dann ist

$$\frac{k-\mu_1}{2} \leq h(X) \leq \sqrt{2k(k-\mu_1)}.$$

Es folgt: Je größer die Spektrale Lücke von X ist, desto besser ist die Qualität des Expandergraphen.

Beweis

a) Wir beginnen mit der ersten Ungleichung. Wir wählen die Menge E der Kanten mit einer willkürlichen Orientierung, welche uns erlaubt anzunehmen, dass jede Kante e∈E einen Beginn e^- und ein Extremum e^+hat.

2.4.3 Definitionen

Wir definieren den einfachen cobounding Operator d: $l^2(V) \to l^2(E)$ mit $df(e) = f(e^+) - f(e^-)$ für f∈$l^2(V)$ und e∈E.

Wir statten $l^2(V)$ und $l^2(E)$ mit dem hermiteschen Skalarprodukt aus:

$$\langle f|g\rangle = \sum_{x\in V} \overline{f(x)}g(x) \text{ [für } l^2(E) \text{ analog].}$$

Des Weiteren definieren wir den adjungierten Operator $d^*: l^2(E) \to l^2(V)$, welche dadurch charakterisiert ist, dass $\langle df|g\rangle = \langle f|d^*g\rangle$ für jedes $f \in l^2(V)$ und $f \in l^2(E)$.

Wir definieren δ:VxE→{−1; 0; 1} durch $\delta(x,e) = \begin{cases} 1, & x \in e^+ \\ -1, & x \in e^- \\ 0, & sonst \end{cases}$. Offensichtlich ist für e∈E und f∈$l^2(V)$: $df(e) = \sum_{x\in V} \delta(x,e)f(x)$; und für alle v∈V, g∈$l^2(E)$: $d^*g(x) = \sum_{e\in E} \delta(x,e)g(e)$.

Zusätzlich definieren wir den kombinatorischen Laplace Operator Δ= $d^*d: l^2(V) \to l^2(V)$ der eine Verbindung zwischen dem einfachen cobounding Operator und dem adjungierten Operator herstellt. Es ist Δ=k*Id-A und insbesondere ist Δ nicht abhängig von der gewählten Orientierung.

Für eine Orthonormalbasis der Eigenfunktionen von A, nimmt Δ folgende Form an:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & k-\mu_1 & & \bigcirc \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & k-\mu_{n-1} \end{pmatrix}$$

der Eigenwert 0 gehört dabei zu der konstanten Funktion von V. Deswegen, wenn f eine Funktion von V ist, mit $\sum_{x\in V} f(x) = 0$, d.h. f ist orthogonal zu der konstanten Funktion $l^2(V)$, erhalten wir

$\|df\|_2^2 = \langle df|df\rangle = \langle \Delta f|f\rangle \geq (k-\mu_1)\|f\|_2^2$.

Wir wenden dies an, auf eine sorgfältig ausgewählte Funktion f. Wir wählen eine Teilmenge F⊆V und setzen:

$$f(x) = \begin{cases} |V-F|, & x \in F \\ -|F|, & x \in V-F. \end{cases}$$

Dann ist $\sum_{x \in V} f(x) = 0$ und $\|f\|_2^2 = |F||V-F|^2 + |V-F||F|^2 = |F||V-F||V|$. Außerdem

$$df(e) = \begin{cases} 0, wenn\ e\ zwei\ Ecken\ in\ F\ oder\ on\ V-F\ verbindet \\ \pm|V|, wenn\ e\ eine\ Ecke\ in\ F\ mit\ einer\ Ecke\ in\ V-F\ verbindet. \end{cases}$$

Daher ergeben $\|df\|_2^2 = |V|^2|\partial F|$ und die frühere Ungleichung ergeben $|V|^2|\partial F| \geq (k-\mu_1)|F|\big|V-F\big||V|$, also $\frac{|\partial F|}{|F|} \geq (k-\mu_1)\frac{|V-F|}{|V|}$.

Wenn wir annehmen, dass $|F| \leq \frac{|V|}{2}$, dann erhalten wir $\frac{|\partial F|}{|F|} \geq \frac{k-\mu_1}{2}$ und daher mit der Definition, dass $h(x) \geq \frac{k-\mu_1}{2}$.

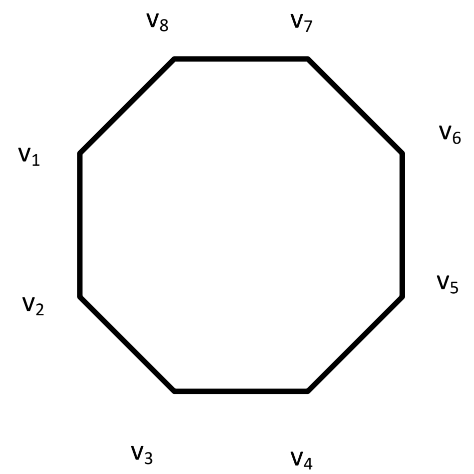
b) Nun soll die zweite Ungleichung bewiesen werden, was allerdings aufwendiger ist, als der Beweis der ersten Ungleichung.

Wir wählen dazu eine nicht negative Funktion f auf V und setzen $B_f = \sum_{e \in E} |f(e^+)^2 - f(e^-)^2|$. Mit $\beta_r > \beta_{r-1} > \cdots > \beta_1 > \beta_0$ bezeichnen wir die Werte von f und setzen $L_i = \{x \in V : f(x) \geq \beta_i\}$ für i=0,1,...r. An dieser Stelle fällt auf, dass L_0=V ist (also $\partial L_0 = \emptyset$).

Um besser verstehen zu können, was genau passiert, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel

$Circ_8$: Kreis Graph mit 8 Ecken.



mit $f(v_1) = f(v_5) = 4, f(v_2) = f(v_0) = f(v_7) = 1, f(v_3) = 2$ und $f(v_8) = 3$, sodass $\beta_3 = 4 > \beta_2 = 3 > \beta_1 = 2 > \beta_0 = 1$. Dann ist

$L_0 = V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ $\partial L_0 = \emptyset$

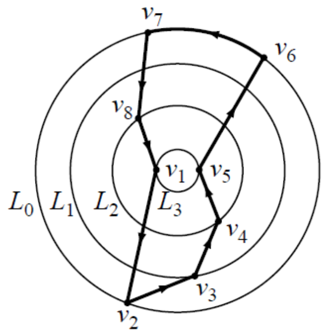
$L_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_8\}$ $\partial L_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}\}$

$L_2 = \{v_1, v_4, v_5, v_8\}$ $\partial L_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}\}$

$L_3 = \{v_1, v_5\}$ $\partial L_1 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_8, v_1\}\}$,

mit $|\partial L_i| = 4$ für i=1,2,3 .

Geometrisch kann man sich den Graphen, als in zwei Höhenlinien gebrochen, vorstellen:



L_0 besteht aus allen Ecken auf oder innerhalb der äußeren Höhenlinie, die zu $\beta_0 = 1$ gehört.
L_1 besteht aus allen Ecken auf oder innerhalb der Höhenlinie, die zu $\beta_1 = 2$ gehört.
L_2 besteht aus allen Ecken auf oder innerhalb der Höhenlinie, die zu $\beta_2 = 3$ gehört.
Und L_3 besteht aus allen Ecken auf oder innerhalb der Höhenlinie, die zu $\beta_3 = 4$ gehört.
Dann besteht jedes ∂L_i aus allen Kanten, die „abwärts" steigen von einem inneren L_i zu einem Knoten mit einem niedrigeren Wert. Aus dem Diagramm sehen wir direkt, dass z.B. $\partial L_2 = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_7, v_8\}\}$.
Nach diesem Beispiel soll es jetzt mit dem allgemeinen Beweis weitergehen, um dann die folgenden Resultate über die Zahlen von B_f.
1. Schritt: $B_f = \sum_{i=1}^{r} |\partial L_i| (\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2)$

Um dies zu zeigen, konstruieren wir mit E_f die Menge der Kanten $e \in E$, für die $f(e^+) \neq f(e^-)$.
Offensichtlich ist dann $B_f = \sum_{e \in E_f} |f(e^+)^2 - f(e^-)^2|$. Jetzt soll $e \in E_f$ einige Ecken x mit $f(x) = \beta_{i(e)}$ verbinden mit einigen Ecken y mit $f(y) = \beta_{j(e)}$. Die Indizes sind so gewählt, dass i(e)>j(e) ist. Daher folgt

$$
\begin{aligned}
B_f &= \sum_{e \in E_f} \left(\beta_{i(e)}^2 - \beta_{j(e)}^2\right) \\
&= \sum_{e \in E_f} \left(\beta_{i(e)}^2 - \beta_{i(e)-1}^2 + {\beta_{i(e)+1}}^2 - .. - \beta_{j(e)+1}^2 + \beta_{j(e)-1}^2 - {\beta_{j(e)}}^2\right) \\
&= \sum_{e \in E_f} \sum_{l=j(e)+1}^{i(e)} \left({\beta_l}^2 - {\beta_{l-1}}^2\right).
\end{aligned}
$$

Wenn man sich an dieser Stelle auf das Diagramm der Höhenlinien zurückbezieht, sieht man, dass jede Kante e, die einen Knoten x mit $f(x) = \beta_{i(e)}$ mit einem Knoten y mit $f(y) = \beta_{j(e)}$ verbindet, jede Höhenlinie β_l zwischen diesen beiden schneidet.

In Ausdruck B_f entspricht dies dem Einsetzen der Nulldifferenz $-{\beta_l}^2 + {\beta_l}^2$ in den Term ${\beta_{i(e)}}^2 - {\beta_{j(e)}}^2$ für jede Höhenlinie β_l, die von e geschnitten wird.
Das bedeutet, dass in der obigen Summe für B_f nur der Term ${\beta_l}^2 - {\beta_{l-1}}^2$ übrig bleibt, für jede Kante e, die eine Ecke x mit $f(x) = \beta_i$ und einer Ecke y mit $f(y) = \beta_j$ verbindet, für $j < l \leq i$.
Mit anderen Worten tritt also für jede Kante ein $e \in \partial L_l$ auf, welches den ersten Schritt erfüllt.

2.Schritt $B_f = \sqrt{2k}\|df\|_2\|f\|_2$

$$
\begin{aligned}
B_f &= \sum_{e\in E}|f(e^+) + f(e^-)| * |f(e^+) - f(e^-)| \\
&\leq \left[\sum_{e\in E}\left(f(e^+) + f(e^-)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{e\in E}\left(f(e^+) - f(e^-)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\mathbf{2}}\left[\sum_{e\in E}\left(f(e^+) + f(e^-)\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \|df\|_2 \\
&= \sqrt{2k}\left[\sum_{x\in V} f(x)^2\right]^{\frac{1}{2}}\|df\|_2 \\
&= \sqrt{2k}\|df\|_2\|f\|_2,
\end{aligned}
$$

wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung und der Tatsache, dass $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.

3. Schritt
Erinnerung:
Den Support von f ist definiert als $suppf := \{x \in V: f(x) \neq 0\}$. Es gilt $|suppf| \leq \frac{|V|}{2}$, woraus folgt, dass $B_f \geq h(X)\|f\|_2^2$.
Um dies zu beweisen, muss sich klargemacht werden, dass $\beta_0 = 0$ und dass $|L_i| \leq \frac{|V|}{2}$ für i= 1, ..., r, sodass $|\partial L_i| \geq h(X)|L_i|$ ist, wegen der Definition von h(X).
Mit dem 1. Schritt folgt dann:

$$
\begin{aligned}
B_f &\geq h(X)\sum_{i=1}^{r}|L_i|({\beta_i}^2 - {\beta_{i-1}}^2) \\
&= h(X)\left[|L_r|{\beta_r}^2 + (|L_{r-1}| - |L_r|){\beta_{r-1}}^2 + .. + (|L_1| - |L_2|){\beta_1}^2\right] \\
&= h(X)\left[|L_r|{\beta_r}^2 + \sum_{i=1}^{r-1}|L_i - L_{i+1}|{\beta_i}^2\right],
\end{aligned}
$$

weil aber $L_i - L_{i+1}$ genau die Höhenlinie ist, wo f den Wert β_i annimmt., wird der Term in der Klammer genau $\|f\|_2^2$.

Abschluss
Nun wird dies jetzt auf die sorgfältig ausgewählte Funktion f angewendet. Sei g eine reell wertige Eigenfunktion von Δ, welche zu dem Eigenwert $k - \mu_1$ gehört. Wir setzen $V^+ = \{x \in V: g(x) > 0\}$ und $f = \max\{g, 0\}$. Fall notwendig wird g durch –g ersetzt und man erhält $|V^+| \leq \frac{|V|}{2}$ (beachte, dass $V^+ \neq \emptyset$, da $\sum_{x\in V} g(x) = 0$ und $g \neq 0$). Für $x \in V^+$ erhält man (, wenn $g(x) \leq 0$ auf $V - V^+$):

$(\Delta f)(x) = kf(x) - \sum_{y\in V} A_{xy} f(y) = kg(x) - \sum_{y\in V^+} A_{xy}\, g(y)$
$\leq kg(x) - \sum_{y\in V} A_{xy} g(y) = (\Delta g)(x) = (k-\mu_1)g(x).$

Benutzt man diese punktweise Abschätzung, so erhält man

$$\|df\|_2^2 = \langle \Delta f | f\rangle = \sum_{x\in V^+} (\Delta f)(x) g(x) \leq (k-\mu_1) \sum_{x\in V^+} g(x)^2 \leq (k-\mu_1)\|f\|_2^2.$$

Durch Kombination des zweiten und dritten Schritts erhält man, nach rausstreichen von $\|f\|_2^2$, das gesuchte Ergebnis:

$$h(x)\|f\|_2^2 \leq B_f \leq \sqrt{2k}\|df\|_2\|f\|_2 \leq \sqrt{2k(k-\mu_1)}\|f\|_2^2.$$

Durch rausstreichen von $\|f\|_2^2$ erhält man das gesuchte Ergebnis. ∎

Aus 2.3 und 2.4 erhalten wir sofort:

Theorem 2.5

Sei $(X_m)_{m\geq 1}$ eine Familie endlicher, zusammenhängender k-regulärer Graphen ohne Schlaufen, so dass $|V_m| \to \infty$ falls $m \to \infty$.

Die Familie $(X_m)_{m\geq 1}$ ist eine Familie von Expander genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $k - \mu_1(X_m) \geq \varepsilon \;\; \forall m \geq 1$.

Dies ist eine Charakterisierung für das Spektrum einer Familie von Expander:

Eine Familie von k-regulären Graphen ist eine Familie von Expander genau dann, wenn die Spektrallücke nicht von 0 begrenzt ist. Darüber hinaus folgt aus 2.4, dass je größer die Spektrallücke ist, desto besser ist die Qualität des Expanders.

Literatur

[1] G. Davidoff, P. Sarnak and A. Valette, Geometry, Elementary Number Theory, Group Theory, and Ramanujan Graphs. London Mathematical Society Student Texts, 55. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.