1 $(X^{p,q})_q$ ist eine Familie von Expandergraphen

1.1 Ziel und Vorgehensweise. *Wir möchten beweisen, dass $(X^{p,q})_q$ eine Familie von Expandergraphen ist und eine explizite untere Schranke für die spektrale Lücke für $q >> p$ angeben. Man kann sogar zeigen, dass $(X^{p,q})_q$ eine Familie von Ramanujan-Graphen ist, dafür reichen unsere (elementaren) Methoden jedoch nicht aus. Wir werden sehen, dass die Graphen $(X^{p,q})_q$ sowohl eine hohe chromatische Zahl als auch einen großen Umfang besitzen. Unser wichtigstes Mittel, um dies zu beweisen, ist die Spur Formel aus früheren Kapiteln. Wir werden diese in Verbindung mit einer quadratischen Form von Quarternionen bringen und damit Abschätzungen für die nicht trivialen Eigenwerte der Adjazenzmatrix bekommen.*

Erinnerung und Konvention. *Es seien $p, q \in \mathbb{P}$ Primzahlen mit $p \geq 5$ und $q > p^8$.*
Es bezeichne $X = (V, E)$ einen Graphen mit $\mid V \mid= n$ Die Adjazenzmatrix eines Graphen ist eine $n \times n$ Matrix. Der Eintrag (a_{ij}) ist gegeben durch die Anzahl der Kanten von v_i nach v_j wobei$v_i, v_j \in V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.
Der Graph X heißt k-regulär, falls $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = k$ für alle $j \in \{1, ..., n\}$.
Der größte Eigenwert der Adjazenzmatrix ist gegeben durch $\mu_0 = k$, falls X k-regulär ist, dies sieht man durch Feststellen, dass $f \equiv 1$ eine Eigenfunktion ist. Falls X zusammenhängend ist, hat μ_0 Vielfachheit 1, weiter gilt für jeden Eigenwert μ_i, dass $\mid \mu_j \mid\leq k$ (siehe Kapitel 1.1.2 des Buches)
Schreibe daher $\mu_0 \geq \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1}$ für das Spektrum der Adjazenzmatrix des Graphen.
Ist $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von zusammenhängenden, k-regulären Graphen ohne Schleifen, so nennt man diese Familie eine Familie von Expandergraphen, genau dann, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit: $k - \mu_1(X_i) \geq \varepsilon$ für alle $i \geq 1$
Das Legendre Symbol für zwei Zahlen p, q ist definiert wie folgt:

$$(\tfrac{p}{q}) = \begin{cases} 0 \text{ falls } p = qk,\ k \in \mathbb{N} \\ 1 \text{ Falls } p \text{ ein quadratischer Rest modulo } q \text{ ist} \\ -1 \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Menge S_p ist eine Menge von bestimmten $p+1$ Quarternionen in Λ' mit Norm p definiert wie immer in Kapitel 4. Hierbei ist $\Lambda' := \{\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) :$ $N(\alpha) = p^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ und $(\alpha \equiv 1 mod 2)$ oder $(\alpha \equiv i + j + k mod 2)\}$
Wir haben folgendes nützliches kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \Lambda' \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^* \arrow[r] \arrow[d] & GL_2(q) \arrow[d] \\ \Lambda \arrow[r, "\Pi_q"] & \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^*/Z_q \arrow[r, "\cong"] & PGL_2(q) \end{tikzcd}$$

Wobei $S_p \subset \Lambda'$, $S_{p,q} \subset PSL_2(q)$ das Bild von S_p in $PGL_2(q)$ ist. Weiter ist $T_{p,q} \subset \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^*/Z_q$ das Bild von S_p in $\mathbb{H}(\mathbb{F}_q)^*/Z_q$. Wir setzen zusätzlich $\Lambda(q) = ker(\Pi_q) = \{[\alpha] = [a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k] \in \Lambda : q \mid a_1, a_2, a_3\}$ und es bezeichne $\Lambda = \Lambda'/ \sim$, wobei $\alpha \sim \beta$ falls es $m, n \in \mathbb{N}$ gibt mit $p^n\alpha = \pm p^m\beta$.

$$\text{Es gilt } X^{p,q} := \begin{cases} \Gamma(PSL_2(q), S_{p,q}) \text{ falls } (\frac{p}{q}) = 1 \\ \Gamma(PGL_2(q), S_{p,q}) \text{ falls } (\frac{p}{q}) = -1 \end{cases}$$

$Y^{p,q} := \Gamma(\Lambda/\Lambda(q), T_{p,q})$ und es gilt für q groß genug und $p \geq 5$: $Y^{p,q} \cong X^{p,q}$
Wir wissen bereits: $X^{p,q}$ ist zusammenhängend, $p+1$ regulär, falls $(\frac{p}{q} = -1)$ ist $X^{p,q}$ bipartit. Die Gruppe, welche $X^{p,q}$ zu Grunde liegt, wirkt transitiv auf der Eckenmenge.

1.2 Definitionen und Konventionen. *Schreibe $X^{p,q} = (V, E)$ mit $\mid V \mid = n$ und $\mu_0 = p+1 > \mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_{n-1}$ für das Spektrum der Adjazenzmatrix.*
Die Chebyshev Polynome U_m sind definiert wie folgt: Man möchte $\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}$ als Polynom in $\cos\theta$ ausdrücken, also setzt man $U_m(\cos\theta) := \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}$. Durch Trigonometrie und Induktion erhält man: $U_{m+1}(x) = 2xU_m(x) - U_{m-1}(x)$. Als Beispiel berechne man $U_1(x) = \frac{\sin(2\cos^{-1}(x))}{\sin((\cos^{-1}(x))} = 2\frac{\sin(\cos^{-1}(x))\cos(\cos^{-1}(x))}{\sin(\cos^{-1}(x))} = 2x$. Sei weiter f_m die Anzahl der Wege der Länge m, die von 1 nach 1 gehen ohne "backtracking".
Nach Prop 4.1.2(a) wirkt die $X^{p,q}$ zugrunde liegende Gruppe transitiv auf den Ecken.
Wir erhalten für die so genannte Spur Formel nach Kor 1.4.7:

$$\sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r} = \frac{p^{\frac{m}{2}}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_m(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}})$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$ Wir haben diese Formel aus Zeitgründen nicht besprochen, daher nehmen wir diese einfach als Fakt hin.
Nun interpretieren wir die linke Seite obiger Gleichung neu, setze hierfür:

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

für $m \geq 1$die quadratische Form und
$s_Q(p^m) :=\mid \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4 : Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = p^m$ und zusätzlich x_0 gerade und x_1, x_2, x_3 ungerade oder x_0 ungerade und x_1, x_2, x_3 gerade$\} \mid$

1.3 Bemerkung. *Sei m gerade oder $p \equiv 1 (mod 4)$ Reduziere nun alle Tupel (x_0, x_1, x_2, x_3) von oben modulo 4.Damit muss nun x_0 ungerade sein. Nun definieren wir:*

$$Q'(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2 + 4q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

In diesem Fall ist dann $s_Q(p^m)$die Anzahl der ganzzahligen Darstellungen von p^m bezüglich Q'.
Nun werden wir uns wieder mit allgemeinem p befassen.

1.4 Lemma. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$s_Q(p^m) = 2 \sum_{0 \leq r \leq \frac{m}{2}} f_{m-2r}$$

Beweis. Identifiziere zuerst $X^{p,q}$ mit $Y^{p,q}$ mit Theorem 4.3.5(2.2). Seien nun $x_0 = 1, x_1, ..., x_{l-1}, x_l = 1$ die Ecken eines Weges der Länge l in $Y^{p,q}$ ohne backtracking. Wie in Proposition 4.3.3(2.2). können wir nun $t_1, ..., t_l \in T_{p,q}$ finden mit $x_i = t_1 t_2 ... t_i$. Schreibe nun $t_i = \Pi_q([\alpha_i])$ für eindeutige $\alpha_i \in S_p$ wobei $i \in \{1, ..., l\}$ Damit folgt nun, dass $[\alpha_1][\alpha_2]...[\alpha_l]$ist ein reduziertes Wort von Länge l in Λ, denn es ist "gelifted"von

einem Weg ohne backtracking. Weiter haben wir
$\Pi_q([\alpha_1][\alpha_2]...[\alpha_l]) = x_l = 1 \implies [\alpha_1][\alpha_2]...[\alpha_l] \in \Lambda(q)$. Damit folgt nun, dass f_l die Anzahl der reduzierten Worte von Länge l in Λ ist, welche zu $\Lambda(q)$ gehören.
Sei nun $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^4$ so, dass dieses Tupel zu $s_Q(p^m)$ beiträgt, d.h.
$Q(x_0, x_1, x_2, x_3) = p^m$ und die richtigen"Kongruenzen modulo 2 treffen zu.
Erhalte damit Quarternionen $\alpha = x_0 + q(x_1 i + x_2 j + x_3 k)$ Daraus folgt nun, dass α zu Λ' gehört und Lemma 4.3.2(2.2). liefert, dass die Äquivalenzklasse von α in $\Lambda(q)$ ist.
Dies liefert nun:

$$s_Q(p^m) = \mid \{\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \Lambda' : N(\alpha) = p^m, q \text{teilt} a_1, a_2, a_3\} \mid$$

Wenn α zur rechten Seite beiträgt, hat α eine eindeutige Faktorisierung $\alpha = \pm p^l \omega_{m-2l}$, wobei ω_{m-2l} ein reduziertes Wort der Länge m-2l über S_p ist. Daher ist die Klasse von $[\alpha]$ ein reduziertes Wort von Länge m-2l in Λ, das zu $\Lambda(q)$ gehört. Startet man umgekehrt mit einem reduzierten Wort ω der Länge m-2l in $\Lambda(q)$ so folgt: $\alpha = \pm p^l \omega$ produziert zwei Quarternionen so wie oben, damit erhalten wir:

$$\mid \{\alpha \in \Lambda' : N(\alpha) = p^m, [\alpha] \in \Lambda(q)\} \mid = 2 \sum_{0 \le r \le \frac{m}{2}} f_{m-2r}$$

□

Damit erhalten wir für die Spur-Formel von $X^{p,q}$:

$$s_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} U_m\left(\frac{\mu_j}{2\sqrt{p}}\right)$$

Vorbemerkungen und Notation für nächste Proposition. *Nun führen wir* $\Theta_p \subseteq \mathbb{C}$ *ein:*

$$\Theta_p := [i \log \sqrt{p}, 0] \cup [0, \pi] \cup [\pi, \pi + i \log \sqrt{p}]$$

Wobei diese komplexen Ïntervalle"die Punkte bezeichnen, die auf einer Geraden zwischen Anfangs- und Endpunkten des jeweiligen Intervalls liegen, z.B. $[0, \pi] = \{t\pi : t \in [0, 1]\}$. *Via* $z \mapsto 2\sqrt{p} \cos z$ *sieht man* $\Theta_p \cong [-(p + 1), (p + 1)]$ *Zusätzlich gilt:* $[0, \pi] \to [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$ *Das heißt, diese Abbildung ßieht"das Ramanujan-Intervall. Für* $j = 0, 1, ..., n - 1$ *definiere nun* $\theta_j \in \Theta_p$ *als das eindeutige Element in* Θ_p *mit:* $\mu_j = 2\sqrt{p} \cos \theta_j$. *Insbesondere gilt dann:* $\theta_0 = i \log \sqrt{p}$ *und falls* $(\frac{p}{q}) \equiv -1$ *gilt* $\theta_{n-1} = \pi + i \log \sqrt{p}$ *(Nach Kor. 4.3.6(2.2))*
Mit der Definition des Chebyshev Polynoms U_m *erhalten wir:*

$$s_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin{(m + 1)\theta_j}}{\sin \theta_j}$$

Um zu zeigen, dass $X^{p,q}$ *Ramanujan sind, muss man zeigen, dass alle* θ_j *außer* θ_0, θ_{n-1} *reell sind. Eine Beweisskizze hierfür befindet sich in Bemerkung Nummer 1.9.*

Mit unseren elementaren Methoden können wir das nicht zeigen, wir werden allerdings zeigen, dass für große q der Imaginärteil beschränkt ist(abhängig von p) und damit, dass $(X^{p,q})_q$ eine Familie von Expandergraphen ist.
Da in der Spurformel die θ_j mit Vielfachheiten der korrespondierenden Eigenwerten vorkommen werden wir diese Vielfachheiten in der nächsten Proposition untersuchen.

1.5 Theorem. *Sei μ ein nicht trivialer Eigenwert von $X^{p,q}$ (d.h. $\mid \mu \mid \neq p+1$)und definiere seine Vielfachheit als $M(\mu)$. Dann folgt: $M(\mu) \geq \frac{q-1}{2}$*

Beweis. Es bezeichne V_μ den Eigenraum zum Eigenwert μ. Nach Aufgabe 4 in Abschnitt 4.1 ist V_μ Darstellungsraum der Gruppe, die $X^{p,q}$ zu Grunde liegt. Diese Darstellung ist gegeben durch die Abbildung$\lambda_G(g) : G \to GL(\mathbb{C}G)$ $g \mapsto \lambda_G(g)$ wobei $\lambda_G(g) := (\lambda_G(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ für $f \in \mathbb{C}G, x, g \in G$. In Aufgabe 4 des Abschnitts 4.1 wurde gezeigt, dass V_μ ein λ_G invarianter Unterraum ist und somit die Einschränkung von λ_G und V_μ wieder eine Darstellung von der Gruppe ist, welche $X^{p,q}$ zugrunde liegt. Da diese Gruppe immer $PSL_2(q)$ enthält, ist V_μ Darstellungsraum von $PSL_2(q)$. Nach Theorem 3.5.1(2.3) hat jede nicht triviale Darstellung von $PSL_2(q)$ mindestens Grad $\frac{q-1}{2}$. Daher reicht es zu zeigen, dass für $\mid \mu \mid \neq p+1$ V_μ eine nicht triviale Darstellung von $PSL_2(q)$ ist. Wir zeigen: Ist V_μ eine triviale Darstellung, so gilt $\mid \mu \mid = p+1$. Hierzu betrachten wir zwei verschiedene Fälle: Ist $(\frac{p}{q}) = 1$ so folgt, dass jede Funktion in V_μ bereits konstant ist, denn: $\lambda_G(g) = id$ und damit $f(g^{-1}x) = f(x)$ für jedes $g \in G(= PSL_2(q))$. Damit folgt $\mu = p+1$.
Ist $(\frac{p}{q}) = -1$ so, muss jede Funktion f in V_μ konstant auf $PSL_2(q)$ und Komplement sein, d.h. es gilt: $f = \begin{cases} a_+ \text{auf} PSL_2(q) \\ a_- \text{auf} PGL_2(q) \setminus PSL_2(q) \end{cases}$
Da f Eigenfunktion der Adjazenzmatrix von $X^{p,q}$ ist, erhalten wir 2 Gleichungen:
$\mu a_- = (p+1)a_+$und
$\mu a_+ = (p+1)a_-$
Nun folgt da $f \neq 0$, dass $\mu^2 = (p+1)^2$ und damit $\mid \mu \mid = p+1$

□

Kommen wir nun zum wichtigsten Ergebnis dieses Abschnitts

1.6 Theorem. *Für festes $\varepsilon \in (0, \frac{1}{6})$ und q groß genug gilt für jeden nicht trivialen Eigenwert μ von $X^{p,q}$*
$\mid \mu \mid \leq p^{\frac{5}{6}+\varepsilon} + p^{\frac{1}{6}-\varepsilon}$ Daraus folgt, dass die Graphen $X^{p,q}$ für große q eine Familie von Expandergraphen sind.

Beweis. Wir beginnen mit der Spurformel

$$S_Q(p^m) = \frac{2}{n} p^{\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin \theta_j}$$

für jedes $m \in \mathbb{N}$. Hier gilt wie oben $\mu_j = 2\sqrt{p}\cos\theta_j$ Ist $\mu_j \notin [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$ so schreibe
$\theta_j = \begin{cases} i\psi_j \text{ falls } 2\sqrt{p} < \mu_j \leq p+1 \\ \pi + i\psi_j \text{ falls } -(p+1) \leq \mu_j < -2\sqrt{p} \end{cases}$

In beiden Fällen gilt $0 < \psi_j \leq log(\sqrt{p})$. Ab jetzt beschränken wir uns auf den Fall, dass m gerade ist, dies geht, da die Spurformel für jedes m richtig ist. Für $\mu_j \notin [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$ folgt, da m gerade ist:

$$\frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin{\theta_j}} = \frac{\sin{i(m+1)\psi_j}}{\sin{i\psi_j})} = \frac{\sinh{(m+1)\psi_j}}{\psi_j} \geq 0$$

Damit gilt dann für nicht triviale Eigenwerte $\mu_k \notin [-2\sqrt{p}, 2\sqrt{p}]$

$$s_Q(p^m) = \frac{2}{n}p^{\frac{m}{2}}M(\mu_k)\frac{\sinh{(m+1)\psi_k}}{\sinh{\psi_k}} + \frac{2}{n}p^{\frac{m}{2}}\sum_{j:\mu_j\neq\mu_k}\frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin{\theta_j}}$$

$$\geq \frac{2}{n}p^{\frac{m}{2}}M(\mu_k)\frac{\sinh{(m+1)\psi_k}}{\sinh{\psi_k}} + \frac{2}{n}p^{\frac{m}{2}}\sum_{j:|\mu_j|\leq 2\sqrt{p}}\frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin{\theta_j}}$$

Man kann nachrechnen, dass für $\theta \in \mathbb{R}$ gilt: $| \frac{\sinh{(m+1)\theta}}{\sinh{(\theta)}} |\leq m+1$ Damit folgt nun

$$s_Q(p^m) \geq \frac{2}{n}p^{\frac{m}{2}}M(\mu_k)\frac{\sinh{(m+1)\psi_k}}{\sinh{\psi_k}} - 2p^{m2}(m+1)$$

Nun betrachten wir $s_Q(p^m)$ aus einem anderen Blickwinkel. Nach Bemerkung 1.3 ist (da m gerade) $s_Q(p^m)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von
$x_0^2 + 4q^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = p^m$ Zunächst schätzen wir die Möglichkeiten für x_0 ab. Es muss gelten: $| x_0 |\leq p^{\frac{m}{2}}$ und $x_0^2 \equiv p^m$ Mit Abschnitt 4.3, Aufgabe 1 folgt nun:
$x_0 \equiv \pm p^{\frac{m}{2}}(modq^2)$ Da sowohl x_0 als auch p ungerade sind, haben wir sogar$x_0 \equiv \pm p^m 2(mod 2q^2)$ Damit folgt nun, dass es maximal $2(\frac{p^m 2}{q^2} + 1)$ Möglichkeiten für die Wahl von x_0 geben kann. Nun können wir also x_0 als fest annehmen und müssen folgende algebraische Gleichung in ganzen Zahlen lösen:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{p^m + x_0^2}{4q^2}$$

Um dies zu tun, nutzen wir die Notation aus Kapitel 2.1.
Mit Korollar 2.1.13 folgt, dass es $r_3(\frac{p^m - x_0^2}{4q^2})$ Möglichkeiten für Lösungen obiger Gleichung gibt. Weiter gilt: $r_3(\frac{p^m - x_0^2}{4q^2}) = O_\varepsilon(\frac{p^m}{q^2})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\forall\varepsilon > 0$ Wobei O_ε den Term bis auf Vorfaktoren und additive Konstanten die höchstens von ε abhängen abschätzt. Damit können wir nun auch $s_Q(p^m)$ abschätzen:

$$s_Q(p^m) = O_\varepsilon[\frac{p^{\frac{m}{2}} + m\varepsilon}{q^{1+2\varepsilon}}(\frac{p^{\frac{m}{2}}}{q^2} + 1)] = O_\varepsilon[\frac{p^{m(1+\varepsilon)}}{q^{3+2\varepsilon}} + \frac{p^{\frac{m}{2}(1+2\varepsilon)}}{q^{1+2\varepsilon}}] = O_\varepsilon[\frac{p^{m(1+\varepsilon)}}{q^3} + \frac{p^{\frac{m}{2}(1+2\varepsilon)}}{q}]$$

Wählt man nun eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ geeignet, erhält man für die zu untersuchende Ungleichung:

$$\frac{M(\mu_k)}{n}p^{\frac{m}{2}}\frac{\sinh{(m+1)\psi_k}}{\sinh{\psi_k}} \leq C_\varepsilon[\frac{p^{m(1+\varepsilon)}}{q^3} + \frac{p^{\frac{m}{2}(1+2\varepsilon)}}{q}] + p^{\frac{m}{2}}(m+1)$$

Nun kürzen wir $p^{\frac{m}{2}}$ und benutze $n \leq q^3$(Kor.3.1.1), damit erhält man:

$$M(\mu_k)\frac{\sinh{(m+1)\psi_k}}{\sinh{\psi_k}} \leq C_\varepsilon[p^{m(\frac{1}{2}+\varepsilon)} + q^2p^{m\varepsilon}] + q^3(m+1)$$

Hat man zusätzlich $p^{\frac{m}{2}} \leq q^3$ so erhält man:

$$M(\mu_k)\frac{\sinh{(m+1)\psi_k}}{\sinh{\psi_k}} \leq C_\varepsilon[q^{3+6\varepsilon} + q^{2+6\varepsilon}] + q^3(1+6\log_p q)$$

Es gilt zustäzlich noch $\sinh\psi_k \leq \sinh\log\sqrt{p}$ und damit:

$$M(\mu_k)\sinh{(m+1)\psi_k} = O_\varepsilon[q^{3+6\varepsilon}]$$

Wenn man m nun als große ganze Zahl betrachtet und q so groß, dass $p^{\frac{m}{2}} \leq q^3$ erhält man folgende Ungleichungskette:

$$\sinh{(m+1)\psi_k} \geq \frac{e^{(m+1)\psi_k}}{3} \geq \frac{e^{-1+6\log_p q)\psi_k}}{3} \geq \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{3}e^{6\log_p q\psi_k}$$

Wobei für die letzte Ungleichung $\psi_k \leq \log\sqrt{p}$ benutzt wurde. Damit erhält man nun:

$$M(\mu_k) = O_\varepsilon(q^{3+6\varepsilon-\frac{6\psi_k}{\log p}})$$

Da μ_k nicht trivial ist, folgt schon $M(\mu_k) \geq \frac{q-1}{2}$ (Prop 4.4.3). Falls q groß genug, so haben wir: $3+6\varepsilon - \frac{6\psi_k}{\log p} \geq 1$ und damit $\psi_k \leq (\frac{1}{3}+\varepsilon)\log p$
Mit $\theta_k = i\psi_k$ oder $\theta_k = \pi + i\psi_k$ und $\mu_k = 2\sqrt{p}\cos\theta_k$ erhält man schließlich:

$$\mid \mu_k \mid = 2\sqrt{p} \mid \cos{(i\psi_k)} \mid = 2\sqrt{p}\cosh\psi_k \leq p^{\frac{5}{6}+\varepsilon} + p^{\frac{1}{6}-\varepsilon}$$

□

Mit 1.2.3 und 1.5.4 erhalten wir nun Abschätzungen für die isoperimetrische Konstante und chromatische Zahl von $X^{p,q}$.

1.7 Korollar. *Für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{6})$ fest und q groß genug gilt:*

$$h(X^{p,q}) \geq \frac{p+1-p^{\frac{5}{6}+\varepsilon} - p^{\frac{1}{6}-\varepsilon}}{2}$$

Und insbesondere falls $(\frac{p}{q}) = 1$ und q groß genug:

$$\chi(X^{p,q}) \geq \frac{p+1}{p^{\frac{5}{6}+\varepsilon} + p^{\frac{1}{6}-\varepsilon}}$$

Damit haben wir eine explizite Konstruktion für Graphen mit großem Umfang und hohe chromatischer Zahl gefunden!

1.8 Korollar. *Fixiert man $N \in \mathbb{N}$, so folgt $\exists p \in \mathbb{P}$ ungerade und derart, dass für $q \in \mathbb{P}$ groß genug:*

$$g(X^{p,q}) \geq N \text{ und } \chi(X^{p,q}) \geq N$$

Beweis. Sei p so, dass $\frac{p+1}{p^{\frac{11}{12}}+p^{\frac{1}{12}}} \geq N$ Wähle nun q so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $q > p^8$
2. $2\log_p q \geq N$
3. $(\frac{p}{q}) = 1$
4. $\chi(X^{p,q}) \geq \frac{p+1}{p^{\frac{11}{12}}+p^{\frac{1}{12}}}$

Mit Theorem 4.3.5 und 4.3.3(2.2) folgt nun

$$min\{g(X^{p,q}), \chi(X^{p,q})\} \geq N$$

□

1.9 Bemerkung. *Wie kann man zeigen, dass $X^{p,q}$ eine Familie von Ramanujan-Graphen ist? Hierfür benötigt man mehr, als unsere elementaren Methoden. Dennoch möchte ich den Beweis und die nötigen Argumente und Mittel hier kurz skizzieren. Die Ramanujan Vermutung [54] ist eine Vermutung über die Koeffizienten von modular cusp forms", für Gewichtugn zwei gibt es in [23] einen Beweis.*
Die Θ-Funktion der Quadratischen Form Q' ist gegeben durch:

$$\Theta(z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^4} e^{2\pi i Q'(x)z} = \sum_{k=0}^{\infty} r_{Q'}(k)e^{2\pi ikz}$$

wobei $r_{Q'}(k)$ die Anzahl der ganzzahligen Repräsentationen der Zahl k durch die Form Q' ist.
Damit folgt nun, dass Θ eine modular form mit Gewichtung 2 ist. Dann kann man Θ in eine modular cusp form und in Eisensteinfolgen zerlegen, dies erlaubt, [23] anzuwenden. Damit erhält man Abschätzungen für $r_{Q'}(m) = s_Q(p^m)$ für gerade m, insbesondere gilt für $\varepsilon > 0$:

$$s_Q(p^m) = \frac{4}{q(q^2-1)}\frac{p^{m+1}-1}{p-1} + O_\varepsilon[p^{\frac{m}{2}(1+\varepsilon)}]$$

für Details siehe [42,57,65].
Dies kann man nun mit den Abschätzungen aus 4.4.4 vergleichen, die man durch elementare Methoden erhält.
Betrachte nun Spurformel aus 4.4.3:

$$s_Q(p^m) = \frac{2}{n}p^{\frac{m}{2}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin\theta_j}$$

Nun stellt man fest, dass $\frac{4}{q(q^2-1)} \frac{p^{m+1}-1}{p-1}$ *genau der Beitrag der trivialen Eigenwerte ist:* $\begin{cases} \theta_0 = i \log \sqrt{p} \text{ falls } (\frac{p}{q}) = 1 \\ \theta_0 = i \log \sqrt{p}, \theta_{n-1} = \pi + i \log \sqrt{p} \text{ falls } (\frac{p}{q}) = -1 \end{cases}$ *Der Einfachheit halber nehme man an, man wäre in Fall 1. Mit der Eichler Abschätzung [23] folgt:*

$$\frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin \theta_j} = O_\varepsilon(p^{\frac{\varepsilon m}{2}})$$

Falls θ_j *nicht reell ist, schreibe mit 4.4.4* $\theta_j = i\psi_j$ *oder* $\theta_j = \pi + i\psi_j$ *für* $\psi_j \in (0, \log \sqrt{p}]$*Nun folgt:*

$$\frac{2}{n} \frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin \theta_j} = \frac{2}{n} \frac{\sinh{(m+1)\psi_j}}{\sinh \psi_j} > 0$$

Da m gerade ist, kann dieser Beitrag zur Summe nicht durch reelle θ_i *ausgeglichen werden, es folgt:*

$$\mid \frac{2}{n} \sum_{i:\theta_i reell} \frac{\sin{(m+1)\theta_i}}{\sin \theta_i} \mid \leq 2(m+1)$$

Falls nun θ_j *nicht reell ist, bekommen wir für* ε *klein und m groß einen Widerspruch zur obigen Abschätzung von* $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin{(m+1)\theta_j}}{\sin \theta_j}$. *Damit erhält man, dass* $X^{p,q}$ *Ramanujan Graphen sind.*

2 Benutzte Resultate und Erklärung einiger Notation

2.1 Notation und Theoreme aus Kapitel 2

Definiere $r_k(n) := \mid \{(x_0, ..., x_{k-1}) \in \mathbb{Z}^k : \sum_{j=0}^{k-1} x_j^2 = n\} \mid$
Mit Korollar 2.1.13 gilt nun:

$$r_3(n) = O_\varepsilon(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \forall \varepsilon > 0$$

2.2 Notation und Theoreme aus Kapitel 4.3

Wir definieren:
$\Lambda' := \{\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{Z}) : \alpha \equiv 1(\mod 2)$ oder $\alpha \equiv i + j + k(\mod 2), N(\alpha) = p^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ Wir schreiben $\alpha \sim \beta$, wenn $\exists n, m \in \mathbb{N}$ mit $p^m \alpha = \pm p^n \beta$, setze $\Lambda = \Lambda' / \sim$ und $Q : \Lambda' \to \Lambda$ die Quotientenabbildung.
Definieren weiter $Z_q = \{\alpha \in \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)* : \alpha = \bar{\alpha}\}$ und $\Pi_q : \Lambda \to \mathbb{H}(\mathbb{F}_q)/Z_q$ und schließlich $T_{p,q} = (\Pi_q \circ Q)(S_p)$ Wobei S_p aus der Definition des Cayley Graphen von $PSL_2(q)$ stammt.

Theoreme 4.3.3, 4.3.5, 4.3.6. *Es gilt:*
$\Lambda(q) = \{[\alpha] \in \Lambda : \alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, q \mid a_1, a_2, a_3\}$
weiter: $g(Y^{p,q}) \geq 2 \log_p q$ *und falls* $(\frac{p}{q}) = -1$ *gilt sogar* $g(Y^{p,q}) \geq 4 \log_p q - \log_p 4$

Für $p > 5$ *und* $q > p^8$ *ist* $X^{p,q}$ *zusammenhängend und damit isomorph zu* $Y^{p,q}$.
Falls $(\frac{p}{q}) = -1$ *ist* $X^{p,q}$ *bi-partit mit* $g(X^{p,q}) \geq \frac{4}{3}\log_p(\mid X^{p,q} \mid) - log_p 4$

2.3 Notation und Theoreme aus Kapitel 3

Theorem 3.5.1. *Sei* $q \geq 5$. *Der Grad einer nicht trivialen Darstellung von* $PSL_2(q)$ *ist mindestens* $\frac{q-1}{2}$.