WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Bäume und freie Gruppen

Eine Seminararbeit zu Kapitel 1 Abschnitt 3
des Buchs „Trees“ von J.P. Serre

Seminar Gruppentheorie und Geometrie:
Gruppen, Expandergraphen und Bäume
Sommersemester 2016

vorgelegt von:

Marco Lotz

Dozenten:

Prof. Dr. Linus Kramer
Dr. Olga Varghese

Münster, 29. April 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dies ist eine Ausarbeitung zum dritten Abschnitt in Kapitel eins des Buchs „Trees“ von Jean-Pierre Serre, die im Rahmen des Seminars über Geometrie und Gruppentheorie: „Gruppen, Expandergraphen und Bäume“ verfasst wurde. Der genannte Abschnitt handelt insbesondere von freien Gruppenwirkungen auf Bäumen, deren genauere Untersuchung zu wichtigen Aussagen über freie Gruppen und Untergruppen freier Gruppen führt. Als ein Hauptresultat kann die Aussage angesehen werden, dass eine Gruppe genau dann frei ist, wenn sie frei auf einen Baum wirkt. Hieraus folgt der Satz von Schreier: Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei. Des Weiteren wird bewiesen, dass eine Gruppe genau dann frei ist, wenn ihr Cayley Graph ein Baum ist.
Freie Gruppen sind eine große Klasse von Gruppen und ein wichtiger Spezialfall von Amalgamen. Dies wird unter dem Aspekt, dass sich jede Gruppe präsentieren lässt, deutlich. Der Abschnitt unterstreicht die enge Beziehung zwischen Bäumen und freien Gruppen. Bäume bieten einen geometrischen Ansatz freie Gruppen über ihre Wirkung zu verstehen sowie Aussagen über die Struktur von Bäumen aus Eigenschaften entsprechender Gruppenwirkungen abgeleitet werden können.
Vorab werden einige notwendige Definitionen und Sätze ausgeführt, bevor es zur Auseinandersetzung mit dem eigentlichen Abschnitt kommt. Zur leichteren Lesbarkeit werden die Bezeichner aus dem Buch größtenteils übernommen und die Unterteilung des Abschnitts beibehalten.

2 Notwendige Definitionen und Sätze

In diesem Abschnitt werden Definitionen eingeführt, die notwendig für das weitere Verständnis der Ausarbeitung sind, aber nicht von Serre in vorigen Abschnitten ausgeführt werden. Darüber hinaus sind hier Hilfssätze zu finden, die ich für spätere Beweise benutze. Teilweise sind diese aus vorstehenden Abschnitten in „Trees“ übernommen, oder aus größeren späteren Beweisen ausgegliedert.

2.1 Definition Sei X eine Teilmenge einer Gruppe F. Wenn für alle Gruppen G und jede Abbildung $\lambda : X \to G$ eine eindeutige Erweiterung zu einem Homomorphismus $F(\lambda) : F \to G$ existiert. Dann heißt F *freie Gruppe* mit Basis X ([1], S. 54).

2.2 Definition Ein *Morphismus* vom Graphen X zum Graphen Y ist eine Abbildung p von $vertX$ nach $vertY$ und von $edgeX$ nach $edgeY$, die die Bedingungen

$$p(o(e)) = o(p(e)) \ , \ p(t(e)) = t(p(e)) \text{ und } p(\overline{e}) = \overline{p(e)}$$

erfüllt ([1], S. 46).

2.3 Bemerkung Bei einem Morphismus zwischen orientierten Graphen entfällt die letzte Bedingung. Zur Erweiterung eines solchen Morphismus auf nicht orientierte Graphen wird die letzte Bedingung dann zusätzlich gefordert.

2.4 Definition Sei G eine Gruppe und X eine nichtleere Menge. G *wirkt* (von links) auf X, wenn für jedes Elementpaar $g \in G$ und $x \in X$ ein Element $g(x) \in X$ eindeutig definiert ist, sodass $g_1(g_2(x)) = g_1g_2(x)$ und $1_G(x) = x$ für alle $x \in X$ und $g_1, g_2 \in G$ gilt.
Die Menge $G(x) = \{gx \,|\, g \in G\}$ für ein x aus X wird *Orbit* oder *Bahn* von x genannt ([1], S.10). Die Menge aller Bahnen $G\backslash X$ heißt *Bahnenraum*.

2.5 Definition Eine Gruppe G *wirkt auf einen Graphen* Γ (von links), wenn Linkswirkungen von G auf die Mengen $vert\Gamma$ und $edge\Gamma$ definiert sind, sodass $go(e) = o(ge)$ und $g\overline{e} = \overline{ge}$ für alle $g \in G$ und $e \in edge\Gamma$ gilt ([1], S.47).

2.6 Lemma *Die Vereinigung einer beliebigen Kette $(T_i)_{i\in I}$ von Bäumen ist wieder ein Baum.*

Beweis. Sei $(T_i)_{i\in I}$ eine beliebige Kette von Bäumen. Angenommen die Vereinigung $\bigcup_{i\in I} T_i$ ist kein Baum. Da die Kette via Inklusion geordnet ist, ist $\bigcup_{i\in I} T_i$ zusammenhängend wie alle Bäume der Kette: Seien x, y aus $vert \bigcup_{i\in I} T_i$ beliebig. Dann gibt es ein $i \in I$ (aufsteigend nach Inklusion geordnet), sodass x und y Elemente in $vertT_i$ sind. Demnach existiert ein Pfad zwischen den beiden Knoten und da diese beliebig waren ist $\bigcup_{i\in I} T_i$ zusammenhängend.
Aus der Annahme folgt also, dass $\bigcup_{i\in I} T_i$ einen Kreis C enthält. C ist nach Definition eines Kreises endlich ([2], S. 15). Daher muss ein Baum T_i in der Kette existieren der C enthält. Das ist ein Widerspruch, da ein Baum keinen Kreis enthält. So folgt das Lemma. □

2.7 Lemma (Das Lemma von Zorn) *Jede partiell geordnete Menge P, deren total geordnete Teilmengen alle eine obere Schranke besitzen, hat mindestens ein maximales Element ([3])*

2.8 Proposition *Sein P und Q zwei Knoten in einem Baum Γ. Es existiert genau ein reduzierter Kantenweg von P nach Q. Dieser ist ein injektiver Pfad ([2], S.18).*

2.9 Proposition *Sei P ein nicht-isolierter terminaler Knoten eines Graphen Γ. Es gilt:*

> *Γ ist genau dann ein Baum, wenn $\Gamma - P$ ein Baum ist.*

([2], S. 19f.)

2.10 Proposition *Sei Λ ein maximaler Baum eines zusammenhängenden nicht leeren Graphen Γ. Dann beinhaltet Λ alle Knoten von Γ ([2], S.21).*

2.11 Lemma *Ein Inverses System von Mengen durch natürliche Zahlen größer gleich 1 indiziert lässt sich in einen Baum übersetzen.*

Beweis. Sei $f_n : X_n \to X_{n-1}$ mit $n \in I \subseteq \mathbb{N}$ und $X_0 = \{e\}$ ein inverses System von Mengen. Aus diesem lässt sich ein Graph Γ konstruieren mit:

$$\mathrm{vert}\Gamma = \bigcup_{n \in I} X_n \text{ und } \mathrm{edge}\Gamma_+ = \{\{Q, f_n(Q)\}|\ n \in I \text{ und } Q \in X_n\}.$$

Der Graph Γ ist nicht leer und zusammenhängend, da $X_0 \neq \varnothing$ und vom jedem Knoten in Γ ein Pfad nach $e \in X_0$ führt. Angenommen Γ beinhaltet einen Kreis $(v_1, ..., v_m)$ mit $v_1 = v_m$. In diesem Kreis müssen zwei verschiedene Knoten aus einer Menge X_j sein, da es keine Kreise mit einem oder zwei Knoten geben kann. Zwei Elemente innerhalb einer Menge sind nie durch eine Kante verbunden. Es gibt keinen Kreis mit drei Knoten. Daraus folgt, dass ein Element aus dem Kreis $v_i \in X_i$ ($i \in \{1, ..., m-1\}$) zwei Bilder unter f_i haben muss. Ein Widerspruch zur Wohldefiniertheit der f_n. □

2.12 Proposition *Sei $\Gamma = \Gamma(G, S)$ der durch eine Gruppe G und eine Teilmenge S definierte Graph.*

(a) Γ ist genau dann zusammenhängend, wenn S die Gruppe G erzeugt.

(b) Γ ist genau dann ein kombinatorischer Graph, wenn gilt $S \cap S^{-1} = \varnothing$

([2], S. 17)

2.13 Lemma *Die Abbildung h aus dem Beweis zu 3.2 ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. Definitions- und Bildbereich von h sind Gruppen. Seien $x, y \in F(S)$ beliebig mit eindeutigen reduzierten Formen:

$$x = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \text{ und } y = t_1^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots t_m^{\bar{\varepsilon}_m}\ ;\ s_i, t_i \in S,\ \varepsilon_i, \bar{\varepsilon}_i \in \{\pm 1\},\ n, m \in \mathbb{N}$$

Nun gilt:

$$h(x \cdot y) = h(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \cdot t_1^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots t_m^{\bar{\varepsilon}_m}) = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \cdot t_1^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots t_m^{\bar{\varepsilon}_m} = h(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}) \cdot h(t_1^{\bar{\varepsilon}_1} \cdots t_m^{\bar{\varepsilon}_m}) = h(x) \cdot h(y)$$

und damit folgt das Lemma. □

2.14 Lemma *Die Verschiebungen $g(T)$ (Teilgraphen) des Baums aus Repräsentanten T im Beweis zu 3.14 sind isomorph zu T und insbesondere Bäume.*

Beweis. Sei $g \in G$ beliebig. Betrachte die Abbildung $t \mapsto g(t)$ (für $t \in edgeT$ oder $t \in vertT$) von T nach $g(T)$. Der Graph $g(T)$ besteht aus den $g(t)$, sodass die Abbildung surjektiv ist. Gelte $g(t) = g(t')$ für $t, t' \in T$. Mit den Eigenschaften einer Wirkung folgt sofort $t = t'$, womit die Abbildung injektiv ist. Des Weiteren ist sie ein Morphismus. Das gilt nach der Definition einer Gruppenwirkung auf einen Graphen. Der Baum $g(T)$ ist also isomorph zu T. Es genügt zu zeigen, dass die Verschiebungen zusammenhängend sind, da sie im Baum X enthalten sind und so keinen Kreis enthalten. Seien $g(t), g(t') \in g(T)$ Knoten mit $t, t' \in T$ für ein beliebiges $g \in G$. Nach den Baumeigenschaften von T gibt es einen Pfad $(t_1, ..., t_n)$ von t zu t' in T. Der Pfad $(g(t_1), ..., g(t_n))$ in $g(T)$ ist dann ein Pfad von $g(t)$ zu $g(t')$, da die entsprechenden Kanten zwischen den t_i durch die Wirkung auf Kanten zwischen den $g(t_i)$ (Wirkung auf Graph) abgebildet werden. Genauer ist $g(T)$ sogar ein Lift des gleichen maximalen Baumes, für den auch T ein Lift ist. Die Hintereinanderausführung von $t \mapsto g(t)$ und der Quotientenabbildung ist wieder die Quotientenabbildung, denn es gilt $G(g(t)) = G(t)$. Da die Bahnen ein gemeinsames Element $g(t)$ haben, sind sie gleich. Der Graph $g(T)$ ist also ein Baum aus Repräsentanten von X^*. □

2.15 Proposition *Sei Γ ein zusammenhängender Graph mit endlicher Anzahl an Kanten. Setze:*

$$s = Card(vert\Gamma),\ a = \frac{1}{2}Card(edge\Gamma).$$

Dann gilt $a \geq s - 1$ mit Gleichheit genau dann, wenn Γ ein Baum ist. (Hier ist a die Anzahl der ungerichteten Kanten.)([2], S. 21)

2.16 Proposition *Sei Γ ein Graph, dann sind äquivalent:*

(i) Γ *ist ein Baum*

(ii) real(Γ) *ist kontrahierbar*

(iii) real(Γ) *ist einfach-zusammenhängend*

2.17 Proposition *Sei Γ ein zusammenhängender Graph mit Orientierung Y_+, $v \in real(\Gamma)$ und $\Delta \subseteq \Gamma$ ein maximaler Baum. Definiere $X := \{y \in Y_+ | y \notin edge\Delta\}$. Dann ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(real(\Gamma), v)$ isomorph zur freien Gruppe $F(X)$ mit Basis X(vgl. [4], Prop. 1A.2.).*

2.18 Proposition *Sei Γ ein Graph und die Wirkung $G \times \Gamma \to \Gamma$ frei wie unten definiert (3.10). Dann genügt die Wirkung $G \times real(\Gamma) \to real(\Gamma)$ folgender Bedingung:*

(**) Für alle $p \in real(\Gamma)$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq real(\Gamma)$, sodass für alle g aus $G - \{1\}$ gilt $U \cap g(U) = \varnothing$.

2.19 Proposition *Sei G eine Gruppe, Γ ein Graph und die Wirkung $G \times real(\Gamma) \to real(\Gamma)$ genüge (∗∗). $G \backslash real(\Gamma)$ sei der Bahnenraum und $\varphi : real(\Gamma) \to G \backslash real(\Gamma)$; $x \mapsto G(x)$ die Quotientenabbildung. Es gilt :*

(i) φ ist eine Überlagerung,

(ii) Wenn $real(\Gamma)$ einfach-zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, dann gilt $G \cong \pi_1(G \backslash real(\Gamma), \varphi(p))$ für $p \in real(\Gamma)$.

(vgl. [4], Prop. 1.40.)

2.20 Lemma *Sei Γ ein zusammenhängender nichtleerer Graph. Für $Q, P \in vert\Gamma$ sei $l_\Gamma(P, Q)$ die minimale Länge eines Pfads zwischen P und Q. Sei $P_0 \in vert\Gamma$. Es existiert ein maximaler Baum Λ in Γ, sodass $l_\Gamma(P, P_0) = l_\Lambda(P, P_0)$ für alle $P \in vert\Gamma$ gilt ([2], S. 23).*

3 Bäume und freie Gruppen ([2], §3)

3.1 Bäume aus Repräsentanten

3.1 Definition

1. Sei G eine Gruppe, die auf einen Graphen Γ wirkt. Eine *Inversion* ist ein Paar bestehend aus einem Gruppenelement $g \in G$ und einer Kante y von Γ, sodass gilt $g(y) = \bar{y}$.

2. G wirkt *ohne Inversion*, wenn kein solches Paar existiert.

3.2 Bemerkung G wirkt ohne Inversion auf Γ ist gleichbedeutend mit: Es existiert eine Orientierung von Γ, die von G erhalten wird.

Beweis. Wenn eine Orientierung von Γ existiert, die von G erhalten wird, dann kann keine Inversion existieren. Angenommen G wirkt ohne Inversion auf Γ. Dann erhält G, die folgendermaßen konstruierte Orientierung: Es wird ein Schnitt $S \subseteq \ edge\Gamma$ für die Wirkung von G auf edgeΓ gewählt. Da G ohne Inversion wirkt, gilt für alle s aus S, dass die Bahnen $G(s)$ und $G(\bar{s})$ disjunkt sind (Bahnen sind gleich oder disjunkt). Nun wird eine Orientierung S_+ von S gewählt. Diese existiert immer ([2], S. 13). Die von der Wirkung erhaltene Orientierung Y_+ von $Y := edge\Gamma$ ist die Vereinigung aller Bahnen der Orientierung des Schnittes: $Y_+ = \bigcup_{s \in S_+} G(s)$. Aus $g(s) = y$ folgt, dass $g(\bar{s}) = \bar{y}$. Es existieren keine zwei Bahnen der Orientierung des Schnitts, die zueinander Inverse Kanten beinhalten. Von jeder Kante aus Y ist höchstens eine Orientierung in Y_+. Außerdem enthält Y_+ von jeder Kante eine Orientierung, weil es für alle y aus Y ein s aus S gibt mit $y \in G(s)$ und gilt, dass entweder s oder $\bar{s}$ in S_+ liegt, sprich entweder y oder $\bar{y}$ in Y_+. □

Beispiel G wirkt ohne Inversion auf Γ', die baryzentrische Unterteilung ([2, S.14]) von Γ, da diese eine natürliche Orientierung hat. Die Kantenmenge $edge\Gamma'$ ist gleich $edge\Gamma \times \{0, 1\}$ und damit entspricht die natürliche Orientierung $edge\Gamma \times \{0\}$. G wirkt auf $edge\Gamma'$ wie auf Γ $(g(y, 0) = (g(y), 0))$. Also wirkt G insbesondere auf Γ' unter Erhaltung der Orientierung.

3.3 Definition Die Gruppe G wirke ohne Inversion auf den Graphen Γ. Der *Quotientengraph* $G\backslash\Gamma$ hat als Knotenmenge (Kantenmenge) den Bahnenraum der Knotenmenge $G\backslash$vertΓ (der Kantenmenge $G\backslash$edgeΓ) unter der Wirkung. Da G ohne Inversion wirkt sind die Inversen der Kanten verschieden von den Kanten in $G\backslash\Gamma$.

3.4 Proposition *Sei Γ ein (zusammenhängender) Graph und G eine Gruppe, die auf diesen ohne Inversion wirkt. Dann lässt sich jeder Teilbaum T' von $G\backslash\Gamma$ zu einem Teilbaum von Γ liften.*

3.5 Bemerkung Umformuliert bedeutet der Satz: Sei Γ ein zusammenhängender Graph und G eine Gruppe, die auf diesen ohne Inversion wirkt. Dann existiert für jeden Teilbaum T' in $G\backslash\Gamma$ ein Teilbaum T in Γ, sodass die Projektion $p : \Gamma \to G\backslash\Gamma$ (; $x \mapsto G(x)$) diesen isomorph auf auf T' abbildet. Das Wort *liften* bedeutet in der Proposition, dass T' sich durch einen Morphismus so in Γ einbetten lässt, dass diese Einbettung wieder injektiv von p auf T' abgebildet wird. Die Voraussetzung „zusammenhängend“ steht in Tress, ist aber für den Beweis nicht erforderlich.

Beweis. Sein T' ein beliebiger Teilbaum in $G\backslash\Gamma$. Gezeigt werden muss die Existenz eines Teilbaums von Γ, der isomorph von p auf T' abgebildet wird. Sei zunächst Ω die Menge der Teilbäume in Γ, die von p injektiv auf T' projiziert werden. In Anbetracht einzelner Punkte, die existieren, da Γ nach Definition einer Gruppenwirkung nicht leer ist, ist Ω nicht leer. Mit der Inklusionsrelation ist Ω wie jedes Mengensystem partiell geordnet. Betrachte eine beliebige Kette (total geordnete Teilmenge) von Unterbäumen $(T_i)_{i\in I}$ in Ω, wobei I eine entsprechende Indexmenge ist. Die Vereinigung dieser Kette $T_v := \bigcup_{i\in I} T_i$ ist nach 2.6 wieder ein Baum. Jeder Punkt und jede Kante des Letzteren ist in einem Baum T_j der Kette enthalten, weshalb sie unter p auf T' injektiv abgebildet werden. Denn falls ein Element t in T' mehrere Urbilder in T_v unter p hat, existiert ein Baum T_k in der Kette $(T_i)_{i\in I}$, der all diese Urbilder enthält. Das ist ein Widerspruch zur Bedingung, dass alle Glieder der Kette injektiv von p auf T' abgebildet werden. Folglich ist T_v eine obere Schranke für $(T_i)_{i\in I}$, weil T_v alle Elemente der Kette enthält, und in Ω enthalten ist. Das heißt jede Kette in Ω hat eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn (2.7) hat Ω ein maximales Element T_0.
Sei T_0' das Bild von T_0 in T'. Dieses ist wieder ein Baum, da die Quotientenabbildung $p|_{T_0}$ eingeschränkt auf T_0 injektiv ist und somit in T_0 keine zwei Elemente aus der gleichen Bahn der Wirkung sind. Angenommen es gilt $T_0' \neq T'$, dass $T_0 \xrightarrow{p} T'$ nicht surjektiv ist. Dann existiert eine Kante y' in T', die nicht zu T_0' gehört. Zusätzlich kann angenommen werden, dass $o(y')$ ein Knoten von T_0' ist. Denn da T' zusammenhängend ist, gibt es in jedem Fall eine Kante, die von einem Knoten aus einem Teilgraphen (ungleich T') von T' zu einem Knoten in T' führt. Das Ende $t(y')$ der Kante gehört dann nicht zur Knotenmenge von T_0'. Andernfalls würde der reduzierte Kantenweg, der nach den Baumeigenschaften von T_0' existiert (2.8), von $o(y')$ nach $t(y')$ in T_0' zusammen mit $\bar{y}'$ einen Kreis in T' ergeben.
Sei $y \in \mathrm{edge}\Gamma$ eine Kante unter p isomorph (Lift) zu y'. Nach der Surjektivität von p existiert y sicher. Durch die Eigenschaft der Quotientenabbildung ist es keine Einschränkung y durch $g(y)$ $(g \in G)$ zu ersetzen und deshalb anzunehmen, dass $o(y)$ in T_0 ist. T_1 sei der Baum der aus T_0 entsteht, wenn der Knoten $t(y)$ (nicht in T_0, da nicht in T_0') und die Kanten y und $\bar{y}$ hinzugefügt werden. Nach Proposition 2.9 ist T_1 ein Baum. Dennoch gilt, dass $T_0 \subsetneq T_1$ und $T_1 \xrightarrow{p} T'$ injektiv ist ($T_1 \in \Omega$). Das ist ein Widerspruch zur Maximalität von T_0. Es gilt also $T_0' = T'$ und der Teilbaum $T_0 \subset \Gamma$ ist ein Lift vom Teilbaum $T' \subset G\backslash\Gamma$. Da T' beliebig war, folgt die Proposition. □

3.6 Definition Sei Γ ein zusammenhängender Graph und G eine Gruppe, die auf diesen ohne Inversion wirkt. Ein *Baum aus Repräsentanten* von $G\backslash\Gamma$ ist jeder Teilbaum T von Γ, der ein Lift eines maximalen Baums in $G\backslash\Gamma$ ist.

3.7 Bemerkung Anders formuliert ist ein Baum aus Repräsentanten jeder Teilbaum T von Γ, der isomorph von der Quotientenabbildung auf einen maximalen Baum in $G\backslash\Gamma$ abgebildet wird. Jede Bahn $G(x)$ mit $x \in vert\Gamma$ beinhaltet genau einen Knoten aus $vertT$.

Beweis. $G\backslash\Gamma$ ist zusammenhängend, weil Γ zusammenhängend ist, und nicht leer (Def. Wirkung). Ein maximaler Baum in $G\backslash\Gamma$ enthält nach (2.10) alle Knoten. Die Knoten in $G\backslash\Gamma$ sind die Bahnen unter G von Knoten aus Γ. Ein Lift T eines maximalen Baums enthält also aus jeder Bahn genau einen Knoten, da T isomorph durch die Quotientenabbildung auf einen maximalen Baum abgebildet wird. □

3.2 Der Graph einer freien Gruppe

3.8 Proposition *Sei $X = \Gamma(G, S)$ der Graph, definiert durch eine Gruppe G und eine Teilmenge $S \subset G$ ([2], S. 16; auch Cayley Graph genannt). Es ist äquivalent:*

(i) X ist ein Baum

(ii) G ist eine freie Gruppe mit Basis S

Beweis. Zuerst wird angenommen, dass G eine freie Gruppe mit Basis S ist. Jedes Element $g \in G$ kann eindeutig in reduzierter Form bezüglich der Basis geschrieben werden:

$$g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}, \text{ wobei } s_i \in S,\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},\ n \in \mathbb{N} \text{ und } i \in \{1, ..., n\}$$

mit $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$, wenn gilt $s_i = s_{i+1}$ ([2], 1.3, Bew. Lemma 1). Die natürliche Zahl n wird *Länge* $l(g)$ von g genannt. Sei G_n die Menge der Elemente der Länge n aus G. Falls g wie oben ein Element von G_n ist ($n \geq 1$), dann grenzt an g im Graphen X ein eindeutiges Element g' aus G_{n-1} an, mit eindeutiger reduzierter Form:

$$g' = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}.$$

Denn angenommen es gibt ein weiteres Element $\tilde{g}$ aus G_{n-1}, das an g in X angrenzt, mit eindeutiger reduzierter Form:

$$\tilde{g} = \tilde{s}_1^{\tilde{\varepsilon}_1} \cdots \tilde{s}_{n-1}^{\tilde{\varepsilon}_{n-1}} \text{ , wobei } \tilde{s}_i \in S, \text{ und } \tilde{\varepsilon}_i \in \{\pm 1\}.$$

Dann existieren $\tilde{s}_n^{\tilde{\varepsilon}_n}$, sodass $\tilde{g} \cdot \tilde{s}_n^{\tilde{\varepsilon}_n} = g$ und $\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}_{n-1}$, wenn gilt $\tilde{s}_n = \tilde{s}_{n-1}$. Demnach ist der Ausdruck $\tilde{s}_1^{\tilde{\varepsilon}_1} \cdots \tilde{s}_n^{\tilde{\varepsilon}_n} = g$ reduziert. Nun, da die reduzierte Form eindeutig ist, muss für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gelten: $s_i^{\varepsilon_i} = \tilde{s}_i^{\tilde{\varepsilon}_i}$.
Jedes Element $g \in G$ hat also einen eindeutigen Nachbarn g' in X mit der Länge $l(g') = l(g) - 1$. Mit dieser Eindeutigkeit lassen sich Abbildungen $f_n : G_n \to G_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren, die jedes Element jeweils auf dessen Nachbarn mit der um 1 verringerten Länge abbilden (vgl. dazu[2], S. 18f. ; wobei die Länge hier die Distanz in X zum Neutralelement $1_G \in G$ ist). Es kann also ein inverses System definiert werden mit $G_0 = \{1_G\}$. Ein inverses System von Mengen mit natürliche Zahlen indiziert ist äquivalent zu einem Baum (vgl. [2], S. 18). Da in diesem Fall der Graph X in ein inverses System übersetzt wurde, ist X ein Baum.

Nun wird andersherum angenommen, dass X ein Baum ist. X ist demnach zusammenhängend und enthält keinen Kreis irgendeiner Länge. Das heißt X ist ein kombinatorischer Graph. Deshalb folgt mit 2.12, dass S die Gruppe G erzeugt und dass $S \cap S^{-1} = \varnothing$. Angenommen G ist nicht die freie Gruppe $F(S)$ mit Basis S. Jedoch werden beide Gruppen von S erzeugt, sodass jedes Element von $F(S)$ kanonisch einem Element aus G zugeordnet werden kann, indem die eindeutige reduzierte Darstellung der Gruppenelemente aus $F(S)$ durch Elemente in S einfach übertragen wird:

$$h : F(S) \to G \text{ mit } s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mapsto s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

Nach Lemma 2.13 ist h ein Gruppenhomomorphismus. Da nach Annahme S nicht die Basis von G ist, aber G von S erzeugt wird und h somit surjektiv ist, ist h nicht injektiv. Ansonsten wäre G isomorph zu $F(S)$ also die freie Gruppe mit Basis S. Folglich ist der Kern $ker(h)$ nicht trivial. Das bedeutet, dass ein Element $\hat{g} \in F(S)$, das nicht das Neutralelement ist, existiert mit $h(\hat{g}) = 1_G$. Wähle ein solches Element $\hat{g}$ von minimaler Länge n mit reduzierter Form in $F(S)$:

$$\hat{g} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}.$$

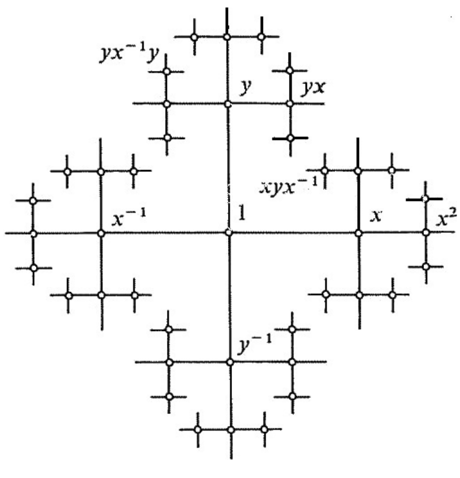
Es gilt $S \cap S^{-1} = \varnothing$ und daher sind weder das Neutralelement 1_G noch inverse Elemente (in Bezug auf die Gruppe G) in S. Daraus folgt $l(\hat{g}) \geq 3$. Sei P_i $(0 \leq i \leq n)$ das Bild von $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i}$ unter h in G. Angenommen es gibt $i, j \in \{0, ..., n-1\}$ mit $i < j$ und $P_i = P_j$. Jetzt gilt in G:

$$s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_j^{\varepsilon_j} = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i} \cdot s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots s_j^{\varepsilon_j}$$

Durch Multiplikation von links mit dem Inversen von $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i}$ in G folgt $1_G = s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots s_j^{\varepsilon_j}$. Allerdings ist die Länge von $s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \cdots s_j^{\varepsilon_j}$ gleich $j - i$, was wiederum echt kleiner als n ist. Das widerspricht der minimalen Länge von $\hat{g}$. Es folgt daraus, dass $P_0, ..., P_{n-1}$ paarweise verschieden sind.
Betrachte nun die P_i in X. Das Element der Länge 0 in G ist das Neutralelement: $P_n = P_0 = 1_G$. Nach der Definition von $\Gamma(G, S)$ sind die Kanten $\{P_i, P_{i+1}\}$ Kanten in X, weil $P_{i+1} = P_i \cdot s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}}$ $(s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}} \in S)$ ist. Also sind für alle $0 \leq i \leq n$ die Knoten P_i und P_{i+1} in X mit einer Kante verbunden. Die $P_0, ..., P_{n-1}$ sind paarweise verschieden. Deshalb sind die geometrischen (ungerichteten) Kanten $\{P_i, P_{i+1}\}$ für $0 \leq i \leq n-1$ in X paarweise verschieden (und nicht invers zueinander). Denn es gilt insbesondere $P_1 \neq P_{n-1}$ und somit $\{P_0, P_1\} \neq \{P_{n-1}, P_n\}$. Durch die paarweise Verschiedenheit der Knoten $P_0, ..., P_{n-1}$ und der entsprechenden Kanten in X, ist allerdings ein Kreis in X gebildet (isomorph zu $Circ_n$). Das ist ein Widerspruch zur Baumeigenschaft der Kreisfreiheit von X. Daraus resultierend ist G die freie Gruppe mit Basis S. □

3.9 Bemerkung Die geschwungenen Klammern {}, wie im vorstehenden Beweis verwendet, symbolisieren im Kontext von Kanten in Graphen ungerichtete Kanten, weswegen inverse Kanten außer Acht gelassen werden können.

Beispiel Serre gibt folgendes Beispiel: $S = \{x, y\}$, $G = F(S)$



3.3 Freie Wirkungen auf Bäume

3.10 Definition Eine Gruppe G wirkt *frei* auf einen Graphen X, wenn die Wirkung ohne Inversion ist und die Stabilisatoren aller Knoten in X trivial sind. Das heißt kein Element $g \neq 1_G$ aus G lässt einen Knoten aus X fixiert. Bei Betrachtung der Anfangs- und Endpunkte einer Kante impliziert das , dass ebenfalls jedes nicht triviale Element keine Kante fixiert (Achtung: manchmal wird frei ohne Inversionsfreiheit definiert).

3.11 Bemerkung Ein Beispiel für eine freie Wirkung ist eine Gruppe G mit einer Teilmenge S. G wirkt dann frei durch Linksmultiplikation auf den Graphen $\Gamma(G,S)$.

Beweis. Die Wirkung ist inversionsfrei, da Linksmultiplikation die Orientierung $G \times S = (edge\Gamma)_+$ in der Definition des Graphen $\Gamma(G,S)$ ([2], S. 16) erhält, was nach 3.2 gleichbedeutend mit inversionsfrei ist: Seien $(g,s) \in G \times S$ und $g' \in G$ beliebig. Es gilt

$$g'(g,s) = (g' \cdot g, s)$$

, da $g'(o(g,s)) = g' \cdot g = o(g' \cdot g, s)$ und $g'(t(g,s)) = g' \cdot gs = t(g' \cdot g, s)$.

Es ist aber $g' \cdot g$ in G also auch $(g' \cdot g, s)$ in $G \times S$. Die Orientierung wird von der Wirkung also erhalten und damit ist diese inversionsfrei.
Sei nun g aus $G - \{1_G\}$ und x aus $vertX$. Es ist $g(x) = g \cdot x \neq x$, weil sonst mit Rechtsmultiplikation von x^{-1} folgen würde , dass g das Neutralelement ist. Ein Knoten wird also von keinem nicht trivialen Element in G fixiert. Die Stabilisatoren sind trivial. □

3.12 Bemerkung Mit obiger Bemerkung und mit Proposition 3.8 lässt sich erkennen, dass für jede freie Gruppe ein Baum existiert, auf den diese frei wirkt. Wie das folgende Theorem zeigt, charakterisiert diese Eigenschaft freie Gruppen. Hier liegt mit der Bemerkung, dass jede freie Gruppe frei auf einen Baum wirkt, eine Äquivalenz vor. Das Theorem folgt aus einem stärkeren nachstehenden Theorem, das Serre in seinem Buch beweist. Dieses liefert zusätzlich eine Basis für jede Gruppe, die frei auf einen Baum wirkt, und macht eine Aussage über die Kardinalität der Basis.

3.13 Theorem *Jede Gruppe, die frei auf einen Baum wirkt, ist frei.*

3.14 Theorem *Sei G eine Gruppe, die frei auf einen Baum X wirkt. Für alle Bäume aus Repräsentanten T von $G\backslash X$ und jede Orientierung $Y_+ \subset edge\ X$, die von G erhalten wird, gilt:*

a) *Sei S die Menge der Elemente $g \neq 1_G$ in G, für die eine Kante $y \in Y_+$ mit Ursprung in T und Ende in gT existiert. Dann ist G frei und S eine Basis von G.*

b) *Falls $X^* := G\backslash X$ eine endlich Anzahl r an Knoten hat und $Card(edge\ X^*) = 2a$ gilt. So gilt $Card(S) - 1 = a - r$.*

Beweis. Sei G eine Gruppe, die frei auf einen Baum X wirkt, T ein Baum aus Repräsentanten von X^* und $Y_+ \subset edge\ X$ eine Orientierung, die von G erhalten wird. Y_+ existiert sicher. Denn eine freie Wirkung ist nach Definition ohne Inversion, was äquivalent zu der Existenz einer Orientierung ist, die von G erhalten wird (3.2). Ebenfalls existiert ein Baum aus

Äquivalenzklassen, da ein maximaler Baum in X^* immer existiert ([2], S. 21) und mit 3.4 einen Lift in X hat. Es wird zuerst a) und dann b) bewiesen.

Betrachte die Abbildung $g \mapsto g(T)$ von G in die Menge der Verschiebungen von T. Diese Abbildung ist surjektiv nach Konstruktion. Angenommen für $g, \tilde{g} \in G$ gilt $g(T) \cap \tilde{g}(T) \neq \varnothing$. In diesem Fall gibt es $t, \tilde{t} \in vertT$, sodass $g(t) = \tilde{g}(\tilde{t})$. Aus letzterer Gleichung folgt mit einer Eigenschaft von Wirkungen $t = g^{-1}\tilde{g}(\tilde{t})$. Demnach haben t und $\tilde{t}$ die gleichen Bahnen unter der Wirkung. Da T ein Baum aus Repräsentanten ist, müssen die Knoten t und $\tilde{t}$ nach Bemerkung 3.7 gleich sein: $t = g^{-1}\tilde{g}(t)$. G wirkt frei und deshalb folgt sofort $g^{-1}\tilde{g} = 1_G$. Das ist äquivalent zu $g = \tilde{g}$. Daraus folgt wiederum, dass alle Verschiebungen von T paarweise disjunkt sind und $g \mapsto g(T)$ injektiv ist. Diese Abbildung ist also bijektiv.
Die Verschiebungen von T durch G sind alle Bäume (2.14). Ihre disjunkte Vereinigung bildet einen Teilgraphen $G \cdot T$ von X. Mit diesem Teilgraphen kann ein neuer Graph $X' := X/G \cdot T$ durch Kontraktion jedes Baumes $g(T)$ zu einem einzigen Knoten gebildet werden. Dieser Knoten wird durch $(g(T))$ abgekürzt. X' ist wieder ein Baum (vlg. [2], S. 22f.).
Ferner kann die Inverse Abbildung zur Bijektion $g \mapsto (g(T))$ als eine Bijektion

$$\alpha : vertX' \to vert\Gamma(G, S) = G$$

aufgefasst werden, wobei $\Gamma(G, S)$ der Cayley Graph der Gruppe G und der Teilmenge S ist. Definitionsgemäß ist $vert\Gamma(G, S) = G$. Die Menge der Verschiebungen von T, die in X' mit einem Punkt assoziiert werden, ist der Knotenmenge von X' gleich. Das heißt jeder Knoten in X' hat die Form $(g(T))$ für ein $g \in G$. Zufolge der Definition einer Kontraktion von Teilbäumen muss dann jeder Knoten von X in einem Baum $g(T)$ liegen: Sei $x \in vertX$. Nach 3.7 ist in der Bahn $G(x)$ ein Knoten $t \in vertT$ des Baums aus Repräsentanten enthalten. Es existiert $g \in G$ mit $g^{-1}(x) = t$. Daraus folgt mit Wirkungseigenschaften $x = g(t)$ und daher $x \in g(T)$. Da $x \in vertX$ beliebig war, folgt, dass die Menge der Verschiebungen von T gleich die Knotenmenge von X' ist.
Nun wird α zu einem Isomorphismus orientierter Graphen erweitert, um mit Proposition 3.8 Teil a) zu zeigen. Definitionsgemäß ist $edgeX' = edgeX - edge(G \cdot T)$. Die Orientierung Y_+ von X wird auf den Graphen X', der eine Teilmenge der Kanten von X als Kantenmenge hat, übertragen: X' hat die Orientierung $Y'_+ = Y_+ \cap edgeX'$. Zur Erweiterung ist es notwendig $\alpha : Y'_+ \to G \times S = (edge\Gamma(G, S))_+$ zu definieren. Sei $y \in Y'_+$ beliebig mit $(g(T)) = o(y)$ und $(g'(T)) = t(y)$ $(g, g' \in G)$. Der Anfang $(g(T))$ und das Ende $(g'(T))$ von y sind nicht gleich, da dies sonst einen Kreis und X' kein Baum wäre. Im Baum X verbindet y die Teilbäume $g(T)$ und $g'(T)$. Es existieren also $t, t' \in T$, sodass gilt $o(y) = g(t)$ und $t(y) = g'(t')$. Betrachte die Kante $g^{-1}(y)$ in X:

$$\begin{aligned} o(g^{-1}(y)) = g^{-1}(o(y)) = g^{-1}g(t) = t \ , \\ t(g^{-1}(y)) = g^{-1}(t(y)) = g^{-1}g'(t') \in g^{-1}g'(T) \end{aligned} \tag{1}$$

Sie verbindet T und $g^{-1}g'(T)$ in X. Das Element $s = g^{-1}g' \in G$ liegt demnach in S. Setze nun $\alpha(y) = (g, s)$.
Die Abbildung α ist jetzt ein Morphismus orientierter Graphen: Sei $y \in Y'_+$ wie oben. Es gilt (Hier nur die erste Eigenschaft eines allgemeinen Morphismus, da $\alpha(y) = (g, s)$ definiert ist, fordert man die zweite $(\overline{\alpha(y)} = \alpha(\overline{y}))$ einfach):

$$\alpha(o(y)) = \alpha(g(T)) = g = o(g, s) = o(\alpha(y)) \text{ und } \alpha(t(y)) = \alpha(g'(T)) = g' = t(g, s) = t(\alpha(y))$$

Diese Abbildung ist surjektiv, weil für jedes $\hat{s} \in S$ nach Definition von S gilt, dass eine Kante z von T nach $\hat{s}(T)$ in X existiert. Die Kante $g(z)$ ($g \in G$ beliebig) verbindet dann $g(T)$ und $g\hat{s}(T)$ (lässt sich analog zu (1) herleiten). Da diese Kanten zwischen Punkten verläuft, die in verschiedenen und deshalb disjunkten Verschiebungen von T liegen, ist sie in keiner Verschiebung von T enthalten (sonst wären mindestens in einer Verschiebung Anfangs- und Endpunkt der Kante enthalten und somit die Verschiebungen nicht disjunkt). Also ist $g(z)$ in $edgeX'$, die Kante zwischen $(g(T))$ und $(g\hat{s}(T))$, mit $\alpha(g(z)) = (g, \hat{s})$. Die Injektivität der Abbildung folgt aus der Injektivität von $\alpha : vertX' \to \Gamma(G, S)$ und der Tatsache, dass X' ein Baum ist. Da X' ein Baum ist, gibt es zwischen zwei verschiedenen Knoten in X' höchstens eine Kante, sonst ist ein Kreis gebildet. Jeder Knoten in $\Gamma(G, S)$ hat nur ein Urbild unter α . Insgesamt haben Anfangs- und Endpunkt einer Kante in $\Gamma(G, S)$ jeweils ein Urbild. Diese Urbilder können durch höchstens eine Kante verbunden sein. Mit der Morphismuseigenschaft ist $\alpha : X' \to \Gamma(G, S)$ folglich injektiv.
Die Graphen X' und $\Gamma(G, S)$ sind isomorph. Das bedeutet, dass auch $\Gamma(G, S)$ ein Baum wie X' ist. Die Baumeigenschaften übertragen sich. Hätte $\Gamma(G, S)$ einen Kreis, wäre dieser isomorph zu einem Kreis in X', der aber nicht existiert. Die Urbilder jeder zwei Knoten in $\Gamma(G, S)$ haben einen Kantenweg in X', der sie verbindet. Dieser hat ein isomorphes Abbild in $\Gamma(G, S)$. Die Knoten in $\Gamma(G, S)$ sind also auch verbunden. Mit Proposition 3.8 ist G eine freie Gruppe mit Basis S. Es gilt a).

Sei $vertX^* = G\backslash X$ nun endlich mit r Elementen, gelte $Card(edgeX^*) = 2a$ ($a \in \mathbb{N}$) und sei W die Menge der Kanten $y \in Y_+$, sodass $o(y) \in T$ und $t(y) \notin T$ gilt. Der Beweis von a) besagt, dass $W \subset Y'_+$ ist, da Anfangs- und Endpunkt von y in verschiedenen Verschiebungen von T liegen. Betrachte α eingeschränkt auf W. Da alle Kanten w in W von T ausgehen gilt $\alpha_{|W}(w) = (1_G, s')$ für $s' \in S$. Sei $s \in S$ beliebig. Es gilt $s \neq 1_G$ und es existiert eine Kante k in Y_+ von T nach $sT \neq T$. Definitionsgemäß ist k in W mit $\alpha_{|W}(k) = (1_G, s)$. Es ist demnach $\alpha(W) = \{1_G\} \times S$. Da α injektiv war, ist $Card(W) = Card(S)$.
Andererseits sei T^* das Bild (unter Quotientenabbildung) von T in X^* und somit ein maximaler Baum, weil T ein Baum aus Repräsentanten ist. Statte X^* mit Y_+^*, dem Bild von Y_+, als Orientierung aus. Alle Verschiebungen von T sind ebenso wie T Bäume aus Repräsentanten (2.14). Alle Kanten in X, die in einer Verschiebung von T liegen, werden auf den maximalen Baum T^* in X^* abgebildet. Diese Kanten werden somit auf $Y_+^* \cap edgeT^*$ abgebildet. Sei e eine Kante in Y_+. Verbinde e die Bäume $g(T)$ und $g'(T)$ ($g \neq g'$). Analog zum Beweis von a) verbindet $g^{-1}(e)$ dann T und $g^{-1}g(T)$, wobei $G(e) = G(g^{-1}(e))$ gilt. Das heißt e und $g^{-1}(e)$ haben unter der Quotientenabbildung das gleiche Bild. Das Bild jeder Kante in X, die nicht in einer Verschiebung von T liegt, hat also eine Kante in W als Lift. Daher sind alle Kanten in Y_+^*, die nicht in $Y_+^* \cap edgeT^*$ liegen, im Bild W^* von W.
Die Mengen $Y_+^* \cap edgeT^*$ und W^* sind disjunkt: Angenommen es gibt ein Element $w \in W$ und ein Element aus $\tilde{t} \in edgeT$, die beide das selbe Bild haben. Dann sind die Bahnen dieser Elemente gleich ($G(\tilde{t}) = G(w)$) und insbesondere liegt w dann in einer Verschiebung von T, was ein Widerspruch zur Definition von W ist, da die Verschiebungen von T paarweise disjunkt sind und sonst einen gemeinsamen Knoten hätten.
Die Abbildung $W \to W^*$ ist surjektiv auf natürliche Weise. Ebenfalls ist sie injektiv: Seien $w, w' \in W$ mit $G(w) = G(w')$. Daraus folgt $o(w) = o(w')$, weil T aus jeder Bahn genau einen Knoten enthält (3.7). Es existiert also ein $g \in G$ mit $g(w) = w'$ und $g(o(w)) = o(g(w)) = o(w')$. Demzufolge ist $g = 1_G$, da G frei wirkt. Es folgt $w = w'$. Die Abbildung $W \to W^*$ ist bijektiv

und damit gilt $Card(S) = Card(W^*)$.
Die Menge $vertX^* = vertT^*$ (T^* als maximaler Baum enthält alle Knoten des Quotientengraphen) ist endlich und Y_+^* enthält die Hälfte aller Kanten von X^*. Wir bekommen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Card(edgeX^*) - Card(vertX^*) &= Card(Y_+^*) - Card(vertT^*)\\ &= Card(W^*) + Card(edgeT_+^*) - Card(vertT^*)\\ &= Card(W^*) - 1 \text{ (wende 2.15 auf den Baum } T^* \text{ an)}\\ &= Card(S) - 1\end{aligned}$$

Durch Einsetzen ist b) bewiesen. □

Topologische Interpretation
Der Teil a) des vorstehenden Theorems lässt sich auch topologisch beweisen, wie im Folgenden skizziert. Die Wirkung von G auf die geometrische Realisierung $\bar{X} := real(X)$ von X, die von der Wirkung auf den Baum induziert wird ($g(e,s) = (g(e), s)$ mit $(e,s) \in edgeX \times [0,1]$), genügt nach 2.18 der Bedingung: Für alle $p \in \bar{X}$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \bar{X}$, sodass für alle g aus $G - \{1\}$ gilt $U \cap g(U) = \varnothing$. Da X ein Baum ist, ist $\bar{X}$ lokal wegzusammenhängend und mit 2.16 einfach-zusammenhängend. Außerdem ist die Quotientenabbildung eine Überlagerung von $\bar{X}$ nach $\bar{X}^* = G\backslash\bar{X} = real(X^*)$ und G kann mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{X}^*)$ (Punkt unbedeutend da wegzusammenhängend) identifiziert werden (folgt mit 2.19). Da T^* ein maximaler Baum in X^* ist und alle Knoten enthält, ist der Quotient $\bar{X}^*/real(T^*) = real(X^*/T^*)$ eine Rose. Dann aber gilt mit Satz 2.17, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\bar{X}^*)$ die freie Gruppe mit der Menge der nicht orientierten Kanten der Rose $real(X^*/T^*)$ als Basis ist. Im Beweis von b) wurde schon gezeigt, dass diese Kreise genau die Elemente in W^* sind und sich somit $G \cong F(S)$ ergibt.

3.4 Anwendung: Der Satz von Schreier

3.15 Theorem (Satz von Schreier) *Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.*

Beweis. Sei G eine freie Gruppe. Dann wirkt G frei auf einen Baum (3.11). Eine Untergruppe $H \subseteq G$ wirkt dann auch frei auf diesen Baum. Mit Theorem 3.13 ist H dann frei. □

3.16 Definition Falls G eine freie Gruppe ist, ist die Kardinalität der Basis von G unabhängig von der gewählten Menge ([1], Kap. 2, Thm. 3.8). Alle möglichen Basen von G haben also die gleiche Kardinalität. Diese Kardinalität wird *Rang* (r_G) von G genannt.

3.17 Korollar (Schreiers Index Formel) *Sei G eine freie Gruppe und H eine Untergruppe von endlichem Index (Anzahl der Nebenklassen $Card(G/H)$) n in G. Dann gilt*

$$r_H - 1 = n(r_G - 1).$$

Beweis. Sei G eine freie Gruppe und H eine Untergruppe von endlichem Index n in G. Setze $G_1 := G$ und $G_2 = H$. Da G eine freie Gruppe ist, existiert ein Baum Γ, auf den G frei wirkt (3.11). Definiere $\Gamma_i := G_i \backslash \Gamma$, $s_i := Card(vert\Gamma_i)$ und $a_i := Card(edge\Gamma_i)$ $(i = 1, 2)$.

Betrachte eine Bahn $G(x)$ für einen Knoten oder eine Kante x in Γ. Die Untergruppe H wirkt auf diese Teilmenge $G(x)$ von Knoten oder Kanten aus Γ. Der Bahnenraum dieser Wirkung ist $H\backslash G(x) = \{H(g(x))|g \in G\}$. Es wird gezeigt, dass es n Bahnen in diesem Raum gibt. Es existieren n Rechtsnebenklassen von H in G. Sei die Menge der Rechtsnebenkassen deshalb von der Form: $\{Hg_1, ..., Hg_n\}$ (Der Index ist sowohl die Anzahl der Rechts- als auch der Linksnebenklassen). Jedes Element von G ist in genau einer Nebenklasse. Sei nun g aus der Nebenklasse Hg_i mit $g = hg_i$. Es gilt: $H(g(x)) = H(hg_i(x)) = H(g_i(x))$. Damit gilt letztere Gleichungen für alle Elemente aus gleichen Nebenklassen. Jetzt sei g' nicht in der Nebenklasse Hg_i. Angenommen die Bahnen $H(g'(x))$ und $H(g_i(x))$ haben ein gemeinsames Element. Dann gilt für ein $h \in H$, dass $hg'(x) = g_i(x)$ ist. Das ist mit Wirkungseigenschaften äquivalent zu $g_i^{-1}hg'(x) = x$. G wirkt frei und somit ergibt sich $g_i^{-1}hg' = 1_G$. Daraus folgt der Widerspruch, dass g' und g_i doch in der selben Nebenklasse sind. Also sind die Bahnen $H(g'(x))$ und $H(g_i(x))$ disjunkt. Es ist $H\backslash G(x) = \{H(g_1(x)), ..., H(g_n(x))\}$ mit $H(g_i(x)) \neq H(g_j(x))$ für $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$. Es gibt also in jeder Bahn von G n Bahnen von H.

Da die Bahnen von G paarweise disjunkt sind hat H insgesamt n mal so viele Bahnen wie G. Die Knoten und Kanten im Quotientengraphen sind Bahnen. Es gilt $s_2 = ns_1$ und $a_2 = na_1$. Der Baum Γ kann so gewählt werden, dass s_1 endlich ist. Ein Beispiel hierfür ist der Cayley Graph $\Gamma(G, S)$ von G mit S als Basis von G. Die Kontenmenge dieses Graphen ist G. Für alle $g, h \in G$ gilt $hg^{-1}(g) = h$, da G durch Linksmultiplikation wirkt. Es gibt also nur eine Bahn und es ist $s_1 = 1$. Dementsprechend ist s_2 auch endlich und Theorem 3.14 b) kann für G und H angewandt werden. Die Gleichung $r_{G_i} - 1 = \frac{1}{2}a_i - s_i$ ist für $i = 1, 2$ erfüllt. Es gilt:

$$r_H - 1 = \frac{1}{2}a_2 - s_2 = n(\frac{1}{2}a_1 - s_1) = n(r_G - 1)$$

□

3.18 Proposition *Sei G eine freie Gruppe mit Basis S und sei H eine Untergruppe von G.*

a) *Es existiert eine Menge aus Repräsentanten T von $H\backslash G$, die der folgenden Bedingung genügt:*

   $(*)$ Wenn $t \in T$ die reduzierte Zerlegung

   $$t = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \text{ mit } s_i \in S \text{ , } \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \text{ und } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1} \text{ wenn } s_i = s_{i+1}$$

   hat, dann gehören alle partiellen Produkte $1, s_1^{\varepsilon_1}s_2^{\varepsilon_2}, \ldots, s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ zu T.

b) *Sei T wie in a) und sei $W = \{(t, s) \in T \times S|\ ts \notin T\}$. Falls $(t, s) \in W$, setze $h_{t,s} := tsu^{-1}$ wobei u in T ist, sodass $Hts = Hu$. Dann ist*

   $$R = \{h_{t,s}|\ (t, s) \in W\}$$

   eine Basis von H.

Beweis. Sei Γ der orientierte Baum $\Gamma(G,S)$, auf den G, also auch H, frei durch Linksmultiplikation wirkt (3.11). Das impliziert auch, dass G die Orientierung $G \times S$ erhält. Für ein $t \in G$ sind die partiellen Produkte in $(*)$ nichts anderes als die Knoten im reduzierten Kantenweg von 1_G nach t in Γ. Betrachte hierzu die Kanten $(1_G, s_1^{\varepsilon_1})$ und $(s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_i^{\varepsilon_i}, s_{i+1}^{\varepsilon_{i+1}})$ für $i < n$. Weiterhin erfüllt eine Teilmenge T von G die Bedingung $(*)$ genau dann, wenn $T = vert\Lambda$ für einen Baum Λ aus Repräsentanten von $H\backslash\Gamma$ gilt, der den Knoten 1_G beinhaltet:
Wie schon im vorigen Beweis unabhängig von der Endlichkeit des Indexes von H in G gezeigt, hat die Wirkung von G auf $vert\Gamma$ genau eine Bahn $G(1_G)$ und in jeder Bahn von G gibt es für jede Nebenklasse von H in G genau eine Bahn der Wirkung von H auf $vert\Gamma$. In diesem Fall entsprechen die Rechtsnebenklassen also genau den Bahnen der Knoten von Γ bezüglich H.
Angenommen eine Teilmenge $T \subseteq G$ erfüllt die Bedingung $(*)$. Da T eine Menge aus Repräsentanten ist, ist jedes Element $t \in T$ in einer anderen Nebenklasse von H. Folglich sind die Bahnen $H(t(1_G)) = H(t)$ der einzelnen Elemente aus T paarweise verschieden und stellen alle Bahnen dar. Der Graph Λ mit der Knotenmenge T und Kanten aus den reduzierten Kantenwegen, die sich aus der reduzierten Darstellung eines jeden $t \in T$ ergeben, ist ein Baum. Vom Knoten 1_G verläuft zu jedem anderen Knoten in T eine Kante. Λ ist deswegen zusammenhängend. Kreisfrei ist Λ als Teilgraph des Baumes Γ (3.8). Da T aus jeder Bahn genau einen Repräsentanten enthält, bildet die Quotientenabblidung $p : \Gamma \to H\backslash\Gamma$ den Graphen Λ injektiv in $H\backslash\Gamma$ ab und $p(\Lambda)$ enthält alle Knoten von $H\backslash\Gamma$. Der Baum Λ wird isomorph auf $p(\Lambda)$ abgebildet. Das heißt $p(\Lambda)$ ist ein maximaler Baum in $H\backslash\Gamma$ und Λ ist demzufolge ein Baum aus Repräsentanten, der den Knoten 1_G beinhaltet.
Andersherum sei Λ ein Baum aus Repräsentanten von $H\backslash\Gamma$ mit $T = vert\Lambda$ und $1_G \in T$. Wie oben schon ausgeführt, ist jede Rechtsnebenklasse genau eine Bahn. Λ ist ein Lift eines maximalen Baumes in $H\backslash\Gamma$, der jeden Knoten (Bahnen) enthält. Das heißt Λ hat aus jeder Bahn genau einen Knoten. Demnach ist T eine Menge von Repräsentanten der Nebenklassen von H in G. Aus dem Grund, dass Λ als Baum zusammenhängend ist, und weil T 1_G enthält, ist $(*)$ für T erfüllt: Sei $t \in T$. Λ ist ein Teilbaum von Γ. Deshalb existiert genau ein reduzierter Kantenweg von 1_G nach t in Γ, der auch in Λ liegen muss (zusammenhängend). Andernfalls entstünde aus zwei verschiedenen reduzierten Kantenwegen ein Kreis. Der reduzierte Kantenweg hat nach Definition des Cayley Graphen die Form $(1_G, s_1^{\varepsilon_1}, s_1^{\varepsilon_1} s_2^{\varepsilon_2}, \ldots, s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n})$, wenn t die reduzierte Zerlegung $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ wie in $(*)$ hat. Somit liegen alle partiellen Produkte in T.

Die Existenz einer Menge T aus Repräsentanten der Rechtsnebenklassen von H in G, die $(*)$ erfüllt, folgt nun aus der Existenz eines maximalen Baums in $H\backslash\Gamma$. Dieser existiert immer ([2], S. 21), da Γ als Cayley Graph einer freien Gruppe nicht leer ist. Der maximale Baum hat nach Proposition 3.4 eine Lift Λ, einen Baum aus Repräsentanten. Dieser Lift hat genau einen Knoten der in der gleichen Bahn/ Rechtsnebenklasse bezüglich H wie 1_G liegt. Das bedeutet es gibt ein $h \in H$, das in $vert\Lambda$ ist. Betrachte die Verschiebung $h^{-1}(\Lambda)$. Für ein beliebiges $g \in G$ gilt:

$$H(h^{-1}(g)) = H(g) \text{ beziehungsweise } Hh^{-1}g = Hg$$

Jedes Element wird nur innerhalb seiner Nebenklasse verschoben. Nach Definition einer Wirkung auf einen Graphen ist $\Lambda \to h^{-1}(\Lambda)$; $g \mapsto h^{-1}(g)$ ein Morphismus von Graphen und daher ein Isomorphismus. Folglich ist $h^{-1}(\Lambda)$ ebenfalls ein Lift des vorher betrachteten maximalen Baums. Der Baum $h^{-1}(\Lambda)$ enthält jetzt 1_G also Knoten. Die Knotenmenge von $h^{-1}(\Lambda)$ ist dann, wie gezeigt, eine solche Menge T, die $(*)$ erfüllt. Der erste Teil ist damit bewiesen.

Sei T nun eine Menge von Repräsentanten der Rechtsnebenklassen von H in G, die die

Bedingung $(*)$ erfüllt. Mit dem Beweis von a) ist T dann die Knotenmenge eines Baums aus Repräsentanten von $H\backslash\Gamma$, in dem der Knoten 1_G ist. Nach Theorem 3.14 hat H eine Basis S', die aus den Elementen $h \neq 1_G$ in H besteht, für die eine Kante $(t, s) \in G \times S$ mit Anfangspunkt $t \in T$ und Endpunkt $ts \in h(T)$ existiert. Es wird nun $S' = R$ gezeigt. Sei h ein Element in S'. Es existiert eine Kante $(t, s) \in G \times S$ mit Anfangspunkt $t \in T$ und Endpunkt $ts \in h(T)$ und h ist verschieden von 1_G. H wirkt frei und verschiebt Elemente innerhalb ihrer Rechtsnebenklasse. Es gibt ein $t' \in T$ mit $ht' = ts$. Die Elemente t' und ts liegen in der selben Rechtsnebenklasse und können daher nicht beide in T sein. Das bedeutet ts ist nicht in T und deshalb ist (t, s) in W. Danach ist $u \in T$ in $h_{t,s} = tsu^{-1}$ eindeutig als t' bestimmt (T hat aus jeder Rechtsnebenklasse genau ein Element, in diesem Fall t'). Mit obiger Gleichung gilt $u^{-1} = s^{-1}t^{-1}h$ und $h_{t,s}$ ist gleich h. Infolgedessen ist h in R enthalten.
Sei umgekehrt $h_{t,s} \in R$. Nach Definition von R ist $(t, s) \in W$. Der Knoten ts ist nicht in T. In der Rechtsnebenklasse von ts ist aber ein Element $u \in T$ (Baum aus Repräsentanten). Es gibt ein $h \in H$, sodass $hu = ts$. Dann ist $h_{t,s} = h$ und, da ts in $h(T)$ ist mit $t \in T$,ist $h = h_{t,s}$ in S' enthalten. Insgesamt ist also $S' = R$ und daher ist R eine Basis für H. □

3.19 Bemerkung T kann in a) so gewählt werden ,dass jedes Element t aus T minimale Länge in seiner Rechtsnebenklasse Ht hat. Mit 2.20 angewandt auf $H\backslash\Gamma$ existiert im Quotientengraphen ein maximaler Baum mit minimalen Kantenwegen vom Knoten H aus. Ein Lift Λ dieses Baums mit $1_G \in vert\Lambda$ (wird aus allgemeinem Lift wie im obigen Beweis erhalten) hat dann als Knotenmenge T alle Elemente minimaler Länge der jeweiligen Rechtsnebenklassen. Angenommen es existiert für ein $t \in T$ ein Element ht ($h \neq 1_G$) in Ht mit geringerer Länge als t. Da der Kantenweg von H nach Ht minimal in $H\backslash\Gamma$ ist, hat der Lift von 1_G nach t in Λ eines solchen Weges auch minimale Länge in Γ. Das heißt t hat auf jeden Fall eine mindestens genauso kurze reduzierte Darstellung wie ht. Das ist ein Widerspruch zur Annahme ht habe eine geringere Länge.

Beispiel Sei $G = F(x, y)$ die freie Gruppe mit Basis $S = \{x, y\}$ mit $x \neq y$ und sei H der Kern der Projektion

$$p : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \; ; \; g = s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \cdot \chi_{\{x\}}(s_k) \; , \; \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \cdot \chi_{\{y\}}(s_k) \right)$$

Dabei ist $s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n}$ die reduzierte Zerlegung von g, χ die Indikatorfunktion und $s_i \in S$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ und $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ wenn $s_i = s_{i+1}$. Die Projektion gibt also an, ob die Summe der Exponenten eines Basiselements gerade oder ungerade ist und ist ein Homomorphismus: Seien $g, g' \in G$ mit $p(g) = (a, b)$ und $p(g') = (a', b')$. Das Produkt der beiden Elemente hat die Summen $a + a'$ und $b + b'$ an Exponenten der Basiselemente der reduzierten Form, da sich nur gleiche Elemente mit inversen Exponenten in der reduzierten Darstellung kürzen, demnach auch in den Summen wegfallen. Deshalb gilt $p(gg') = (a + a', b + b')$.
Es ergibt sich der Index 4 von H in G. Denn es gibt eine Rechtsnebenklasse, die auf $(0, 0)$ abgebildet wird, eine Nebenklasse, die auf $(1, 0)$ abgebildet wird, eine Nebenklasse, die auf $(0, 1)$ abgebildet wird und eine Nebenklasse, die auf $(1, 1)$ abgebildet wird. Mit Schreiers Index Formel 3.17 folgt $r_H = 1 + 4(r_G - 1) = 5$. Wenn eine Menge aus Repräsentanten der Nebenklassen $T = \{1_G, x, y, xy\}$ gewählt ist, sagt Proposition 3.18, dass H die Basis $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$

hat, definiert durch die folgenden Gleichungen der Form $ts = h_{t,s}u$ (selbe Notation wie in Proposition):

$xx = h_1 \cdot 1_G$ (xx nicht in T, ensteht durch Rechtsmult. von $x \in T$ mit Basiselement x),
$yx = h_2 \cdot xy$ (yx nicht in T, ensteht durch Rechtsmult. von $y \in T$ mit Basiselement x),
$yy = h_3 \cdot 1_G$ (y nicht in T, ensteht durch Rechtsmult. von $y \in T$ mit Basiselement y),
$xy \cdot x = h_4 \cdot y$ ($xy \cdot x$ nicht in T, ensteht durch Rechtsmult. von $xy \in T$ mit Basiselement x, $yx^{-1}y^{-1}x^{-1}$ ist in H und es gilt $yx^{-1}y^{-1}x^{-1} \cdot xyx = y$ also $Hxyx = Hy$)
$xy \cdot y = h_5 \cdot x$ ($xy \cdot y$ nicht in T, ensteht durch Rechtsmult. von $xy \in T$ mit Basiselement y, $xy^{-2}x^{-1}$ ist in H und es gilt $xy^{-2}x^{-1} \cdot xy^2 = x$ also $Hxy^2 = Hx$)

Das entspricht allen möglichen Kanten von T nach $ts \notin T$. Mit den Gleichungen erhalten wir für H die Basis

$$\{x^2, yxy^{-1}x^{-1}, y^2, xyxy^{-1}, xy^2x^{-1}\}$$

.

Literatur

[1] Oleg Bogopolski. *Introduction to Group Theory.* European Mathematical Society, March 2008.

[2] J. Stilwell and J.P. Serre. *Trees.* Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[3] Max Zorn. A remark on method in transfinite algebra. *Bulletin - Society of the American Mathematical Society 41 667-670*, 1935.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2002.