Das Strukturtheorem

Strukturtheorem schon mal anschreiben
Gliederung: 1. Fundamentalgruppe 2. $\tilde{X}$
3. ϕ und ψ 4. Beweis

§1 Die Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen:

Erinnerung (Graph von Gruppen):
Graph von Gruppen $(\mathcal{G}, Y)$ mit
- Graph Y
- Familie von Gruppen $\mathcal{G}$, sodass G_p Gruppe für jedes $p \in$ Ecken(Y) und G_y Gruppe für jedes $y \in$ Kanten(Y)
- Monomorphismen $\alpha_{t(y)}: G_y \to G_{t(y)}$ mit $a \mapsto a^y$
- $G_y = G_{\bar{y}}$ $\forall y \in$ Kanten(Y) [$o(y)$ Start, $t(y)$ Ziel]

Definition ($F(\mathcal{G}, Y)$):
Sei Y ein zus.h. nicht-leerer Graph, $(\mathcal{G}, Y)$ Graph von Gruppen.
$F(\mathcal{G}, Y) = \Gamma / \langle\langle \{ y\bar{y}, ya^y y^{-1}(a^{\bar{y}})^{-1} \} \rangle\rangle = \langle \Gamma \mid y\bar{y}, ya^y y^{-1}(a^{\bar{y}})^{-1} \rangle$
mit Γ ist das freie Produkt von den G_p und und F(Kanten(Y)).

Definition (Wörter in $F(\mathcal{G}, Y)$):
Sei c ein Weg in Y mit Ursprung $P_0 \in$ Ecken(Y). Seien $y_1, \dots, y_n$ die Kanten von c [wobei $n = l(c)$ Länge des Weges] und setze $P_i = o(y_{i+1}) = t(y_i)$.
Ein "Wort von Typ c" in $F(\mathcal{G}, Y)$ ist ein Paar (c, μ), wobei $\mu = (r_0, \dots, r_n)$ eine Folge von Elementen $r_i \in G_{P_i}$. Das Element $|c, \mu| = r_0 y_1 r_1 y_2 \cdots y_n r_n$ von $F(\mathcal{G}, Y)$ heißt "dem Wort (c, μ) zugeordnet".

Definition der Fundamentalgruppe von $(\mathcal{G}, Y)$:
(a) Sei $P_0 \in$ Ecken(Y). $\pi_1(\mathcal{G}, Y, P_0)$ ist die Menge der $|c, \mu|$ aus $F(\mathcal{G}, Y)$, wobei c ein Weg mit Anfang und Ende äquivalent zu P_0.
(b) Sei T Spannbaum von Y.

$\pi_1(\mathcal{G},Y,T) = \langle F(\mathcal{G},Y) \mid \text{Kanten}(T)\rangle = \left(\ast_{P\in \text{Ecken}(Y)} G_P\right) * F(\text{Kanten}(Y)) / \sim$

mit Relationen $g_y a^y g_y^{-1} = a^{\bar y}$ und $g_{\bar y} = g_y^{-1}$ für $y \in \text{Kanten}(Y)$, $a \in G_y$, und $g_y = 1$ für $y\in \text{Kanten}(T)$, wobei g_y Bild von y in $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T)$.

[Definitionen sind äquivalent, da die Projektion $pr: F(\mathcal{G},Y)\to \pi_1(\mathcal{G},Y,T)$ einen Isom. $\pi_1(\mathcal{G},Y,P_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathcal{G},Y,T)$ ind.]

Beispiele:

(1) $G_y=\{1\}$ $\forall y\in \text{Kanten}(Y)$: $\pi_1(\mathcal{G},Y,T) = \left(\ast_{P\in \text{Ecken}(Y)} G_P\right) * F(\text{Kanten}(Y))$

(2) $Y = \overset{P}{\bullet} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\bullet}$ ein Segment: $\pi_1(\mathcal{G},Y,Y) = G_P *_{G_y} G_Q$

(3) Y ist Baum: $\pi_1(\mathcal{G},Y,Y) = \varinjlim(\mathcal{G},Y)$

§2 Konstruktion von $\tilde X = \tilde X(\mathcal{G},Y,T)$:

- $\tilde X$ Graph
- $(\mathcal{G},Y)$ Graph von Gruppen mit Y zus.h. und nicht leer.
- T Spannbaum
- A Orientierung
- $e(y) = \begin{cases}0, & y\in A\\ 1, & y\notin A\end{cases}$ für $y\in \text{Kanten}(Y)$ und bezeichne $|y|$ die Kante von $y, \bar y$, die zu A gehört
- $\pi = \pi_1(\mathcal{G},Y,T)$ wirkt auf $\tilde X$
- $p: \tilde X\to Y$ Morphismus, der Isom. $\pi\backslash\tilde X \xrightarrow{\cong} Y$ induziert
- Schnitte: · $\text{Ecken}(Y) \to \text{Ecken}(\tilde X)$, $P \mapsto \tilde P$
  · $\text{Kanten}(Y) \to \text{Kanten}(\tilde X)$, $y \mapsto \tilde y$ von p

Wir fordern:

- Stabilisator $\pi_{\tilde P}$ von $\tilde P$ äquivalent zu G_P für $P\in \text{Ecken}(Y)$
- Stabilisator $\pi_{\tilde y}$ von $\tilde y$ äquivalent zu G^ω_ω UG von $G_{t(\omega)}$, wobei $\omega=|y|$ für $y\in \text{Kanten}(Y)$ und G^ω_ω das Bild von G_ω in $G_{t(\omega)}$

Daraus folgt: - $\text{Ecken}(\tilde X) = \coprod_{P\in \text{Ecken}(Y)} \pi/\pi_{\tilde P}$

- $\text{Kanten}(\tilde X) = \coprod_{y\in \text{Kanten}(Y)} \pi/\pi_{\tilde y}$, wobei $\pi_{\tilde P} = G_P$, $\pi_{\tilde y} = G^\omega_\omega$
- $\overline{g\tilde y} = g\tilde{\bar y}$, $o(g\tilde y) = g g_y^{-e(y)} \widetilde{o(y)}$, $t(g\tilde y) = g g_y^{1-e(y)}\widetilde{t(y)}$ $(g\in\pi)$

Beispiele:

(1) Alle G_P äquivalent zu $\{1\}$: $\pi = \pi_1(X,T)$ und $\tilde{X}$ ist die universelle Überlagerung von Y relativ zu T

(2) $Y = P \overset{y}{\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet} Q$ Segment: $\tilde{X}$ ist der Baum assoziiert mit $\pi = G_P *_{G_y} G_Q$

§3 Die Morphismen ϕ und ψ:

Die Gruppe G wirkt ohne Inversion auf zus.h. nicht-leeren Graphen X, $j: T \to X$ ist ein Lift. Sei $(\mathcal{G}, Y)$ ein bestimmter Graph von Gruppen mit $Y = G\backslash X$. T sei Spannbaum von Y, A Orientierung von Y und e wie in §2.

Wir erweitern j zu einem Schnitt j: Kanten$(Y) \to$ Kanten(X), sodass $j\bar{y} = \overline{jy}$. $h_y \in G$, sodass $t(jy) = h_y\, jt(y)$ für $y \in A-$Kanten(T).

Wir erweitern außerdem $y \mapsto h_y$ zu ganz Kanten(Y) durch $h_{\bar{y}} = h_y^{-1}$ und $h_y = 1$ für $y \in$ Kanten(T).

Für alle $y \in$ Kanten(Y) gilt nun $o(jy) = h_y^{-e(y)} jo(y)$ und $t(jy) = h_y^{1-e(y)} jt(y)$.

Sei G_Q (bzw. G_z) der Stabilisator einer Ecke Q (Kante z) von X.

$(\mathcal{G}, Y)$ wird dann def. durch $G_P = G_{jP}$ für $P \in$ Ecken(Y) und $G_y = G_{jy}$ für $y \in$ Kanten(Y). Der Homom. $G_y \to G_{t(y)}$ ist geg. durch $a \mapsto a^y = h_y^{e(y)-1} a h_y^{1-e(y)}$.

Sei $\phi: \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \to G$ Homom. def. durch Inkl. $G_P \to G$ und $\phi(g_y) = h_y$.

$\psi: \tilde{X}(\mathcal{G}, Y, T) \to X$ Homom. def. durch $\psi(g\tilde{P}) = \phi(g)\, jP$ und $\psi(g\tilde{y}) = \phi(g)\, jy$.

Lemma 1:

Sei G Gruppe, die auf Graphen X wirkt, und sei T ein Baum von Vertretern von X/G. Sei Y Teilgraph von X, der T enthält und jede Kante, die Anfang oder Ende in T hat, und für den $GY = X$ gilt. $\forall y \in$ Kanten(Y) mit Ursprung in T sei $g_y \in G$, sodass $g_y t(y) \in$ Ecken(T). Die Gruppe H erzeugt von den g_y und den Stabilisatoren G_P ($P \in$ Ecken(T)) ist äquivalent zu G.

Sei W der kleinste Teilgraph von X, der jY $\forall y \in$ Kanten(Y) enthält.
Jede Kante von W hat Anfang oder Ende in jT und es gilt $G \cdot W = X$
$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ ϕ (und daher auch ψ) sind surj.
Außerdem ist W in $\psi(\tilde{X})$ enthalten und ϕ ind. Isomorphismen zwischen den Stabilisatoren der entspr. Ecken und Kanten in $\tilde{X}$ und X $\Rightarrow$ ψ ist lokal inj.

§4 Das Strukturtheorem:

Lemma 2: Sei $f: \tilde{X} \to X$ ein lokal inj. Morph. von einem zus. h. Graphen $\tilde{X}$ in einen Baum X $\Rightarrow$ f injektiv

Beweis:
Da $\tilde{X}$ zush. ist, reicht es zu zeigen, dass wenn c ein inj. Weg in $\tilde{X}$ ist, dann ist auch der Weg $f \circ c$ inj.. Weil X ein Baum ist, reicht es zu prüfen, dass $f \circ c$ kein Backtracking besitzt (folgt aus Prop.) Die letzte Eigenschaft folgt direkt aus der Tatsache, dass c inj. und f lokal inj.. □

Proposition:
Seien P, Q zwei Ecken eines Baumes Γ. Dann ex. genau eine kürzeste Verbindung von P nach Q und diese ist ein inj. Weg

Theorem 1:
Sei $(\mathcal{G}, Y)$ ein zus. h. nicht-leerer Graph von Gruppen, sei T ein Spannbaum in Y und sei A Orientierung von Y. Dann ist $\tilde{X}$ ein Baum.

Strukturtheorem:
Folgende Aussagen sind äquivalent
(1) X ist ein Baum
(2) $\tilde{X} \xrightarrow{\psi} X$ ist ein Isom.
(3) $\pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \xrightarrow{\phi} G$ ist ein Isom.

Beweis:

(1)$\Rightarrow$(2) Folgt aus Lemma 2, da ψ surj. und lokal inj.

(2)$\Rightarrow$(1) Folgt aus Theorem 1

(3)$\Rightarrow$(2) Klar, da ψ über ϕ def.

(2)$\Rightarrow$(3) Sei N der Kern von ϕ und $P \in$ Ecken(Y). $N \cap G_P = \{1\}$, da ϕ einen Isom. von G_P nach G_P definiert. Ist $n \in N$ nicht-trivial, dann sind $\tilde{P}$ und $n\tilde{P}$ unterschiedlich und haben das selbe Bild in X $\lightning$ zur Inj. von ψ $\Rightarrow \phi$ inj. $\square$

Korollar:

Angenommen, X ist ein Baum. Sei R die Untergruppe von G, die von den G_P, $P \in$ Ecken(X), erzeugt wird. Dann ist R ein Normalteiler von G und G/R kann mit der Fundamentalgruppe des Graphen $Y = G \backslash X$ identifiziert werden.