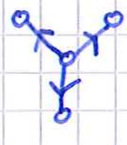
<u>Bäume und Amalgame</u> Lovis Kirschner

<u>Konvention:</u> Jede Gruppenwirkung ohne Inversion.

§ 1. Der Fall mit zwei Faktoren

<u>1. Def:</u> Sei G eine Gruppe, die auf einem Graphen X wirkt. Ein <u>Fundamentalbereich</u> ist ein Teilgraph $T \subseteq X$, der isomorph zu $G \backslash X$ ist.

<u>Beispiel:</u> a) $G = \{1\}$, X bel. Graph $\Rightarrow$ X Fundber.

b) $X =$  , $G = \mathbb{Z}/3$ $\Rightarrow$ $T = \circ \!\rightarrow\! \circ$ ist Fundber.

<u>Def:</u> Ein (Teil-) Graph isom zu $Path_1 = \circ - \circ$ heißt <u>Segment</u>.

<u>Bem:</u> Für ein Segment $\overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$ gilt $G_P \cap G_Q = G_y$ für jede Gruppenwirkung auf einem Baum (G_P, G_Q, G_y die jeweiligen Stab.)

<u>2. Satz:</u> Sei G eine Gruppe, die auf einem Graphen X wirkt, sodass das Segment $T := \overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$ ein Fundamentalbereich ist. Seien G_P, G_Q, G_y die jeweiligen Stabilisatoren. Dann sind äquivalent:

i) X ist ein Baum

ii) Der Homom $\varphi: G_P *_{G_y} G_Q \to G$, $g_1 \cdots g_n \mapsto \prod_{i=1}^{n} g_i$ ist ein Isom.

<u>Beweis (Skizze):</u> Der Beweis folgt aus den beiden Lemmata:

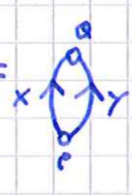
<u>Lemma A:</u> X ist zush. $\Leftrightarrow$ $G = \langle G_P \cup G_Q \rangle$ ($\Leftrightarrow$ φ surjektiv).

<u>Lemma B:</u> X enthält keinen Kreis $\Leftrightarrow$ φ ist injektiv.

(ohne Beweis).

<u>Beispiel:</u> a) Beispiel b) von vorhin: Sei $T = \overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$ ein Fundber.

$\Rightarrow G_P = \mathbb{Z}/3$, $G_Q = \{0\} = G_y \Rightarrow G_P *_{G_y} G_Q \cong \mathbb{Z}/3 * \{0\} / \{0\} \cong \mathbb{Z}/3 \cong G$

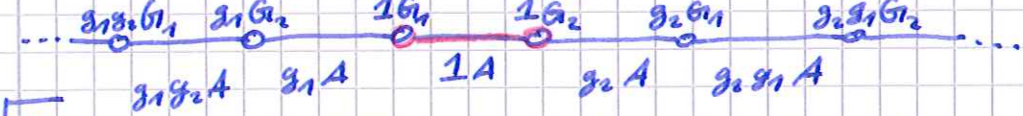
b) $X =$  $G = \mathbb{Z}/2 \Rightarrow T = \overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ}$ ist Fundber. $G_P = G = G_Q$, $G_y = \{0\}$

$\Rightarrow G_P *_{G_y} G_Q \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 / \{0\} \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2 \not\cong G$

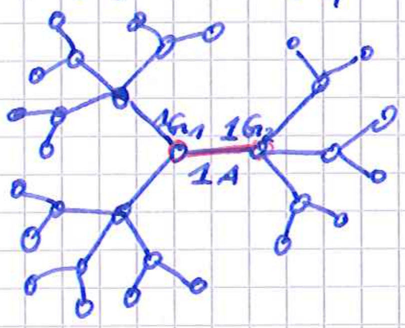
3. Theorem: Sei $G = G_1 *_A G_2$ ein Amalgam von zwei Gruppen. Dann gibt es einen (bis auf Isomorphie eind.) Baum X auf dem G wirkt mit Fundber. ein Segment $T = \overset{P}{o} \xrightarrow{y} \overset{Q}{o}$, $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$, $G_y = A$ sind die jeweiligen Stabilisatoren.

Beweis: Sei X der folgende Graph: $V = G/G_1 \amalg G/G_2$, $E = G/A \amalg \overline{G/A}$ mit den Abb. $E \to V \times V$, $gA \mapsto (gG_1, gG_2)$, $\overline{gA} \mapsto (gG_2, gG_1)$ und $E \to E$, $gA \to \overline{gA}$, $\overline{gA} \mapsto gA$. Setze $P = 1G_1$, $Q = 1G_2$, $y = 1A$.
Definiere Wirkung von G auf X durch Linksmultipl. auf den Ecken und Kanten, also $g(xG_i) = gxG_i$ bzw. $g(xA) = gxA$. Es folgt: $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$, $G_y = A$. Offensichtlich gilt für jede Ecke: $g^{-1}(gG_i) = 1G_i$ für $i = 1,2$ und nach Konstruktion von X ex. kein $g \in G$ mit $g(xG_i) = hG_j$ für $i \neq j$. Außerdem $g^{-1}(gA) = 1A$.
$\Rightarrow T = \overset{P}{o} \xrightarrow{y} \overset{Q}{o}$ ist Fundber. Wegen Satz 1.2. ist X ein Baum. □

4. Beispiel: a) $\langle g_1 \rangle = G_1 = \mathbb{Z}/2 = G_2 = \langle g_2 \rangle$, $A = \{0\}$. $G \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$



b) $G_1 = \mathbb{Z}/3$ $\quad G_2 = \mathbb{Z}/4$ $\quad A = \{0\}$ $\quad G = \mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/4$



5. Gruppentheoretische Anwendung

Sei $G = G_1 *_A G_2$ ein Amalgam von zwei Gruppen, X der zugehörige Baum.

Satz: Sei $U \leq G$ UG. so, dass $U \cap gG_ig^{-1} = \{1\}$ für alle $g \in G_i$, $i = 1,2$. Dann ist U eine freie Gruppe.

Beweis: z.z.: U wirkt frei auf X. A: U wirkt nicht frei auf X.
$\Rightarrow$ es gibt $g \in U - \{1\}$ mit $gxG_i = xG_i$ für ein $xG_i \in G/G_i$, $i = 1,2$.
$\Rightarrow x^{-1}gxG_i = 1G_i \Rightarrow x^{-1}gx \in G_i \Rightarrow$ es gibt $h \in G_i$ mit $x^{-1}gx = h$

$\Rightarrow g = xhx^{-1}$ ↯ $\square$

Satz (ohne Beweis): Jede endliche UG von G ist enthalten in einer Konjugation von G_1 oder G_2.

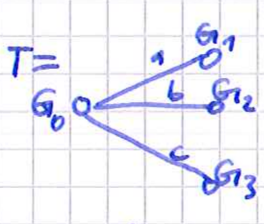
§2. Der allgemeine Fall

1. Def: Ein Graph von Gruppen $(\mathcal{G}, T)$ besteht aus einem Graphen T und einer Menge von Gruppen $\mathcal{G}$, so dass es für jedes $P \in V$ (bzw. $y \in E$) eine Gruppe G_P (bzw. G_y) gibt, zusammen mit Monoms $G_y \hookrightarrow G_{y_1}$. Außerdem: $G_y = G_{\bar{y}}$. Ist T ein Baum, so heißt $(\mathcal{G}, T)$ ein Baum von Gruppen.

Def: Sei $(\mathcal{G}, T)$ ein Baum von Gruppen. Wir bez. mit $G_T = \varinjlim (\mathcal{G}, T)$ den Kolimes des Baums von Gruppen.

Beispiel: a) $T = \overset{P}{\circ} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\circ} \rightsquigarrow$ 3 Gruppen: G_P, G_Q, G_y, Monoms $G_P \hookleftarrow G_y \hookrightarrow G_Q \Rightarrow G_T = G_P *_{G_y} G_Q$.

b) $T =$



mit $G_0 = G_a = G_b = G_c =: A$, Monoms $A \hookrightarrow A$, $A \hookrightarrow G_i$

$\Rightarrow G_T = \underset{i}{*_A} G_i$

Konvention: Ist $(\mathcal{G}, T)$ ein Baum von Gruppen, so fassen wir G_P (bzw. G_y) in kanon. Weise als UG's in G_T auf.

2. Theorem: Sei $(\mathcal{G}, T)$ ein Baum von Gruppen. Dann gibt es einen (eindeutigen) Graphen X, mit $T \subseteq X$, und eine Wirkung G_T auf X mit folgenden Eigenschaften: T ist ein Fundamentalbereich und für alle $P \in V$ (bzw. $y \in E$) sind G_P (bzw. G_y) die Stab. Außerdem ist X ein Baum.

Beweis: Sei X der folgende Graph: $\tilde{V} := \coprod_{P \in V} \left(G_T / G_P \right)$, $\tilde{E} := \coprod_{y \in E} \left(G_T / G_y \right)$

$\tilde{E} \to \tilde{V} \times \tilde{V}$, $xG_y \mapsto (xG_{y_0}, xG_{y_1})$, $\tilde{E} \to \tilde{E}$, $xG_y \mapsto xG_{\bar{y}}$. Offensichtlich ist T isom. zum Teilgraphen von X, dessen Ecken und Kanten nur aus den trivialen NK's bestehen. Definiere Wirkung von G_T auf X durch Linksmultipl. auf Ecken und Kanten, also $g(xG_P) = gxG_P$ bzw. $g(xG_y) = gxG_y$. Trivialerweise

gilt, dass der Stabilisator von $1G_p$ (bzw $1G_y$) G_p (bzw. G_y) ist.
Weiter gilt $g^{-1}(gG_p) = 1G_p$ bzw. $g^{-1}(gG_y) = 1G_y$ und $g(xG_p) \neq 1G_q$ bzw. $g(xG_y) \neq 1G_z$ für alle $g \in G_T$, $p, q \in V$, $y, z \in E$ mit $p \neq q$, $y \neq z$.
$\Rightarrow$ T Fundber.
(ohne Beweis, dass X ein Baum ist). $\square$

<u>Bem:</u> Der Graph X heißt <u>assoziiert</u> mit $(\mathcal{G}, T)$.

<u>3. Theorem:</u> Sei G eine Gruppe, die auf einem Graphen X wirkt, mit Fundber. ein Baum T. Sei $(\mathcal{G}, T)$ der Baum von Gruppen dessen G_p und G_y die Stab. von den Ecken p und Kanten y sind. Sei $\tilde{X}$ der mit $(\mathcal{G}, T)$ assoziierte Graph. Dann sind äquivalent:

i) X ist ein Baum
ii) $\varphi: G_T \to G$, $g_1 \cdots g_m \mapsto \prod_{i=1}^{m} g_i$ ist ein Isom.
iii) $\tilde{X} \cong X$

(ohne Beweis).

<u>Fazit:</u>

a) $G \cong G_1 *_A G_2 \Leftrightarrow G$ wirkt auf einem Baum X mit Fundber. ein Segment.

b) $G \cong G_T$ für einen Baum von Gruppen $(\mathcal{G}, T) \Leftrightarrow G$ wirkt auf einem Baum X mit Fundber. T.