Seminarvortrag SoSe 16 zu „Trees" [Serre]

CHRISTOPH HILMES

§0. Freie Gruppen und Präsentierungen

Def Eine Gruppe F heißt frei über $S \subseteq F$ wenn

(UE) Für jede Gruppe G und jede Abb $S \xrightarrow{\lambda} G$ genau ein Hom. $F \xrightarrow{F(\lambda)} G$ ex mit $F(\lambda)_{|S} = \lambda$.

Def • Ein Wort w über einer Menge X ist eine endliche Folge $w = x_1 \cdots x_n$ mit $n \geq 0$ und $x_i \in X$. Schreibe $x^0 := ()$, $x^2 := xx$ usw.

Satz Eine Gruppe G ist frei über $S \subseteq G$ gdw. sich jedes Element g eindeutig als reduziertes Wort über $S \cup S^{-1}$ schreiben lässt: $g = s_1^{k_1} \cdots s_n^{k_n}$ mit $s_i \in S \cup S^{-1}$, $s_i \neq s_{i+1}$, $k_i \in \mathbb{N} - \{0\}$

Konstruktion: Zu jeder Menge S ex. Gruppe $F(S)$ die frei ist über S.

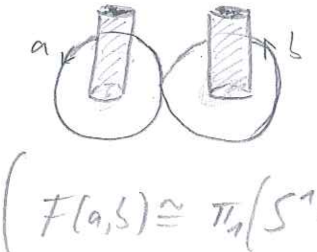
Setze $M = M(S \cup S^{-1})$ Menge aller Wörter über $S \cup S^{-1} = \tilde{S}$

und $F(S) := M/\sim$ mit $g \sim f \iff g$ geht durch endliche Folge von Einfügen/Entfernen von aa^{-1} ($a \in S \cup S^{-1}$) aus f hervor.

mit $[g][f] := [gf]$ und $1_{F(S)} = [()]$. Klar: $[g]^{-1} = [g^{-1}]$.

Bsp • $F(\{a\}) =: F(a) = \{(), a, a^2, a^3, \ldots, a^{-1}, a^{-2}, \ldots\} \cong \mathbb{Z}$.

• $F(a,b) = \{(), a, a^2, \ldots, ab \neq ba, ab^{-1}a^2b, \ldots\}$ $\rightsquigarrow$



$\ncong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$\left(F(a,b) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) \right)$

Präsentierungen von Gruppen Sei S Menge und $R \subseteq F(S)$.

Für eine Gruppe G heißt $\langle S \mid R \rangle := F(S) / \langle\langle R \rangle\rangle$ norm. Abschluss

eine Präsentierung, falls $G \cong \langle S \mid R \rangle$.

Idee R beschreibt die Relationen, die in G gelten

Bsp · $F(S) = \langle S \mid \emptyset \rangle$ D.h $F(S)$ ist frei von Relationen.

↳ Also insb.: $\langle a \mid \emptyset \rangle = \mathbb{Z}$

· $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle a \mid a^m \rangle$, · $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

Bemerkung Jede Gruppe G kann präsentiert werden:

Sei $S \subseteq G$ EZS und betrachte $S \xhookrightarrow{i} G$

(UE) $\Rightarrow$ $F(S) \xrightarrow{F(i)} G$ mit $F(S)|_S = i \overset{S \text{ EZS}}{\Rightarrow} F(i)$ surj.

Also $G \cong F(S) / \ker F(i) = \langle S \mid \ker i \rangle$

§1 Freie Produkte und Kolimiten

I Indexmenge (zB $= \{1,2\}$)

Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen.

Eine Gruppe G mit Hom. $(G_i \xrightarrow{\iota_i} G)_{i\in I}$ heißt **freies Produkt / Koprodukt** der $(G_i)_{i\in I}$ falls:

(UE) Für jede Gruppe H und Hom. $(G_i \xrightarrow{\varphi_i} G)_{i\in I}$

genau ein Hom $G \xrightarrow{\varphi} H$ ex. mit $\varphi\circ\iota_i = \varphi_i \ \forall i\in I$.

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[dr, "\iota_i"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_i"] & & \\
& G \arrow[r, "\exists!\varphi"] & H \\
G_j \arrow[ur, "\iota_j"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Bem: Zu jeder Familie $(G_i)_i$ von Gruppen ex ein freies Produkt und dieses ist bis auf Isom. eind. Schreibe daher $\ast_{i\in I} G_i = \ast G_i$ für „das" freie Produkt.

Denn: Schreibe $G_i = \langle S_i \mid R_i \rangle$ als Präsentierung und setze $G = \langle \dot\bigcup S_i \mid \dot\bigcup R_i \rangle$. Die Abb $\iota_j : G_j \to G$ erhalte durch:

$$S_j \hookrightarrow F(\dot\bigcup S_i) \twoheadrightarrow \frac{F(\dot\bigcup S_i)}{\langle\langle \dot\bigcup R_i \rangle\rangle} = G \overset{UE}{\Longrightarrow} F(S_j) \longrightarrow G$$

$$\overset{\text{Hom.}}{\underset{\text{satz}}{\Longrightarrow}} G_j = \frac{F(S_j)}{\langle\langle R_j \rangle\rangle} \xrightarrow{\iota_j} G.$$

Bem: Die Abb ι_i sind inj! ($H = G_i$, $\varphi_i = id_{G_i} \Rightarrow \varphi\circ\iota_i = id_{G_i}$)

D.h. wir finden die Gruppen G_j in G als UG wieder: $G_j \cong \iota_j(G_j) \leq G$.

$\rightsquigarrow$ Später mehr...

$ab \rightsquigarrow o(ab) = \infty$

Bsp: $\mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_6 \cong \langle a \mid a^4 \rangle * \langle b \mid b^6 \rangle = \langle a, b \mid a^4, b^6 \rangle$

Def Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen.

Für $i,j \in I$ sei $F_{ij} \subseteq \mathrm{Hom}(G_i, G_j)$.

Eine Gruppe G zsm mit Hom. $(G_i \xrightarrow{f_i} G)_{i\in I}$, welche $f \circ f_i = f_j \ \forall f \in F_{ij}$ erfüllen, heißt <u>Kolimes</u> der $(G_i)_{i\in I}$ falls gilt:

(UE) Für jede Gruppe H mit Hom $(G_i \xrightarrow{\varphi_i} H)_{i\in I}$, welche $f \circ \varphi_i = \varphi_j \ \forall f \in F_{ij}$ erfüllen, ex. genau ein Hom $\varphi : G \longrightarrow H$ mit $\varphi \circ f_i = \varphi_i \ \forall i$.

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_i"] & & \\
G_j \arrow[r, "f_j"'] \arrow[rr, bend right, "\varphi_j"'] & G \arrow[r, "\exists!\varphi"] & H
\end{tikzcd}$$

$F_{ij} \ni f$

<u>Bem</u> Zu jedem solchen System $\{(G_i)_{i\in I}, F_{ij}\}$ wie oben ex. ein Kolimes und dieser ist bis auf Isom. eindeutig.

Schreibe daher $G = \varinjlim G_i$

<u>Denn:</u> Setze $Z = \{ g f(g)^{-1} \mid g \in G_i,\ f \in F_{ij} \} \subseteq \underset{i\in I}{*} G_i$

und $\varinjlim G_i = {*G_i} / \langle\langle Z \rangle\rangle$. Erhalte $G_j \xrightarrow{\iota_j} *G_j \longrightarrow \varinjlim G_j$, $G_j \xrightarrow{f_j} \varinjlim G_j$.

<u>Bem</u> $\varinjlim(\mathbb{Z}_2 \leftarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3) = \{1\}$.

Also i.A. gilt $G_j \not\subseteq \varinjlim G_i$ ...

<u>Klar:</u> $\langle \bigcup f_i(G_i) \rangle = \varinjlim G_i$

§2. Amalgamierte Produkte

<u>Def</u> Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Fam. von Gruppen und A eine weiter Gruppe mit Monom. $(A \overset{\alpha_i}{\hookrightarrow} G_i)_{i\in I}$. Dann heißt $\underset{A}{*} G_i := \varinjlim((G_i)_i, A)$ das amalgamierte Produkt der $(G_i)_i$ über A.

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[rd, "f_i"] & \\ A \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, "f_A"] & \underset{A}{*} G_i \\ G_j \arrow[ru, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Bsp</u> $G_1 = \mathbb{Z}_6 \cong \langle a \mid a^6 \rangle$, $G_2 = \mathbb{Z}_4 \cong \langle b \mid b^4 \rangle$, $A = \mathbb{Z}_2 = \langle t \mid t^2 \rangle$

mit $\mathbb{Z}_2 \overset{\alpha_1}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_6$, $t \mapsto a^3$; $\mathbb{Z}_2 \overset{\alpha_2}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_4$, $t \mapsto b^2$

$$\rightsquigarrow \mathbb{Z}_6 \underset{\mathbb{Z}_2}{*} \mathbb{Z}_4 = \frac{\mathbb{Z}_6 * \mathbb{Z}_4 * \mathbb{Z}_2}{\langle\langle Z \rangle\rangle} = \frac{\langle a,b,t \mid a^6, b^4, t^2 \rangle}{\langle\langle t a^{-3}, t b^{-2} \rangle\rangle}$$

$$= \langle a,b,t \mid a^6, b^4, t^2, t=a^3, t=b^2 \rangle \cong \langle a,b \mid a^6, b^4, a^3=b^2 \rangle$$

<u>Normalform</u> Identifiziere $A \cong \alpha_i(A) \leq G_i$ für alle $i \in I$ und wähle f.a. $i \in I$ ein Repräsentantensystem S_i von ${}_A\backslash^{G_i}$ mit $1 \in S_i$.
D.h. $A \times (S_i - \{1\}) \longrightarrow G_i - A$ ist eine Bijektion.

<u>Theorem</u> Für jeden $g \in \underset{A}{*} G_i$ ex. <u>genau eine</u> Darstellung

$$g = f_A(a) \cdot f_{i_1}(s_1) \cdot \ldots \cdot f_{i_n}(s_n) \text{ mit } n \geq 0,\ i_k \neq i_{k+1},\ s_k \in S_{i_k} - \{1\},\ a \in A.$$

<u>Bsp</u> $${}_{\underset{\{1,a^3\}}{\mathbb{Z}_2}} \backslash^{\overset{\langle a\rangle}{\mathbb{Z}_6}} = \{ \overset{\{1,a^3\}}{[1]}, \overset{\{a,a^4\}}{[a]}, \overset{\{a^2,a^5\}}{[a^2]} \}, \quad {}_{\underset{\{1,b^2\}}{\mathbb{Z}_2}} \backslash^{\mathbb{Z}_4} = \{ \overset{\{1,b^2\}}{[1]}, \overset{\{1,b^3\}}{[b]} \}$$

Wähle $S_1 = \{1, a, a^2\}$, $S_2 = \{1, b\}$. Betrachte $g = ba^2b^3 \in \langle a,b \mid a^6, b^4, a^3=b^2 \rangle$

Es gilt: $$b a^2 \underbrace{b^3}_{= \underbrace{b^2}_{\in A} \cdot \underbrace{b}_{\in S_2}} = b a^2 \underbrace{b^2}_{=a^3} \cdot b = b a^2 a^3 \cdot b = b a^3 \cdot a^2 b = b b^2 \cdot a^2 b = \underbrace{b^2}_{\in A} \cdot \overset{S_2-1}{b}\, \overset{S_1-1}{a^2}\, \overset{S_2-1}{b}$$

<u>Korollar</u> 1) Die Hom $(f_i)_i$, f_A sind inj und wir <u>identifizieren</u> $G_j \cong f_j(G_j) \leq \underset{A}{*} G_i$
sowie $A \cong f_A(A) (= f_i(A)\ \forall i) \leq \underset{A}{*} G_i$

2) In $\underset{A}{*} G_i$ gilt $G_i \cap G_j = A$ für $i \neq j$.

<u>Denn</u>: $f_i(g) = f_i(h) \Rightarrow f_i(a) f_i(s) = f_i(\tilde{a}) f_i(\tilde{s}) \Rightarrow f_A(a) f_i(s) = f_A(\tilde{a}) f_i(\tilde{s})$
mit $g = as$ $h = \tilde{a}\tilde{s}$ $\overset{\text{eind.}}{\Longrightarrow} a = \tilde{a} \wedge s = \tilde{s} \Rightarrow g = h$.

Umformulierung: Für alle $g \in \ast_A G_i - A$ ex eine eind. Folge $(i_1, \dots, i_n)$ mit $i_k \neq i_{k+1}$ und Elem (nicht eind) $g_k \in G_{i_k} - A$ sodass $g = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$. Die Existenz ist klar nach Normalform.

Eind: $g_1 \cdots g_n = g_1 \cdots \underbrace{g_{n-1}}_{\in G_{i_{n-1}} - A} \overset{A}{\overset{\cup}{a_n}} \overset{S_{i_n} - \{1\},\ \text{da } g_n \notin A}{\overset{\cup}{s_n}} = g_1 \cdots g_{n-2}\, a_{n-1} s_{n-1} s_n = \dots = \overset{A}{\overset{\cup}{a_1}} \overset{S_{i_1}-\{1\}}{\overset{\cup}{s_1}} \cdots \overset{S_{i_n}-\{1\}}{\overset{\cup}{s_n}}$ □

Setze für $g \in G$: $l(g) = \begin{cases} n & ; g \notin A \\ 0 & ; g \in A \end{cases}$. g zykl. red $\Leftrightarrow i_1 \neq i_n$

Konsequenzen der Normalform: Satz (a) Jedes Element in $\ast_A G_i$ ist zu einem zykl. red Elem. konj oder zu einem Elem aus einem G_i.
(b) Jedes zykl. red. Elem. hat unendl. Ordnung

Bew: a) Induktion über $n = l(g)$. $n = 0, 1$ klar. Sei $g \in \ast_A G_i$ mit $l(g) \geq 2$. und nicht zykl. red. d.h $g = g_1 \cdots g_n$ mil $i_1 = i_n$.
Dann gilt für $\tilde{g} = g_1^{-1} g g_1 = g_2 \cdots (g_n g_1)$ dass $l(\tilde{g}) \leq n-1$.
(I.V) $\Rightarrow \tilde{g}$ ist konj zu einem zykl. red. Elem oder zu einem der G_i.

b) Sei $g = g_1 \cdots g_n$ zykl. red. $\Rightarrow g^2 = g_1 \cdots \overbrace{g_n g_1}^{\in G_{i_n} \neq G_{i_1}} \cdots g_n \rightsquigarrow l(g^2) = 2n$ usw... □

Korollar A: Jedes Elem in G von endlicher Ordnung ist konj zu einem in G_i.
Korollar B: G_i torsionfrei $\forall i \Rightarrow \ast_A G_i$ torsionsfrei.

§3. HNN-Erweiterung. Sei G eine Gruppe mit Untergruppe $A \leq G$.
Sei weiter $A \xrightarrow{\theta} G$ ein Monomorphismus. D.h $\theta(A) \cong A$.
Die HNN-Erweiterung von G bzgl θ ist:

$$G \ast_\theta = \langle G, t \mid tat^{-1} = \theta(a)\ \forall a \in A \rangle$$
$$=: \langle S \,\dot\cup\, \{t\} \mid R \cup \{tat^{-1}\theta(a)^{-1} \mid a \in A\} \rangle$$

Es gilt $G \leq G \ast_\theta$ und: A und $\theta(A)$ sind konj zueinander.