Strukturtheorem

Konvention: Wirkungen sind ohne Inversion und Graphen sind nicht-leer und zusammenhängend.

Motivation: Bisher:

1) G wirkt frei auf einem Baum
$\iff$ G ist freie Gruppe

2) Allgemeiner: G wirkt auf auf einem Baum X mit $G\backslash X \cong p \overset{y}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} q$ Path
$\iff G \cong G_p *_y G_q$

3) G wirkt auf Baum X mit $G\backslash X$ ist Baum
$\iff G \cong \lim(G,T)$

Heute: G wirkt auf Baum $\iff G \cong \pi_1$

Strukturtheorem

§1 Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen

Graph von Gruppen

Def 1: Ein Graph von Gruppen $(\mathcal{L}, Y)$ ist:
~~ist~~
- ein zush. nichtleeren Graph Y
- Gruppe G_P für ~~jeden Knoten~~ alle $P \in \operatorname{vert} Y$
- Gruppen G_y für alle $y \in \operatorname{edge} Y$
- Monomorphismen $G_y \to G_{t(y)}, a \mapsto a^y$
- $G_y = G_{\bar{y}}$

Fundamentalgruppe

Def 2: $(\mathcal{L}, Y)$ Graph von Gruppen,
T ein Spannbaum von Y
Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{L}, Y, T)$
von $(\mathcal{L}, Y)$ an T ist

$$\pi_1(\mathcal{L}, Y, T) = \left(\mathop{*}_{P \in \operatorname{vert} Y} G_P \right) * F(\operatorname{edge} Y) / \sim$$

wobei $\sim$ die folgenden Relationen sind:

$a \in G_y$

$a^y \in G_{t(y)}$

$g_y \in F(\operatorname{edge} Y)$ das zu y gehörende Element.

$$\left.\begin{array}{l} g_y a^y g_y^{-1} = a^{\bar{y}} \\ g_{\bar{y}} = g_y^{-1} \end{array}\right\} \text{für } y \in \operatorname{edge} Y, ~~\text{und}~~$$

$$g_y = 1 \qquad \text{für } y \in \operatorname{edge} T$$

~~Die Fundamentalgruppe ist~~

~~Es~~

Die Fundamentalgruppe ist unabhängig von der Wahl von T.

Es gibt eine äquivalente 2. Def. über eine Ecke statt des Spannbaums.

Nicht beweisen, aber Spezialfälle:
(die wir schon kennen)

1. Bsp: Y bel. Graph,
$G_P = \{1\}$ für alle $P \in \operatorname{vert} Y$
Monomorph. $\Rightarrow G_y = \{1\}$ für alle $y \in \operatorname{edge} Y$

Relationen: $a^y = 1$, ~~g_y~~

$$\Rightarrow \Pi_1(\mathcal{L}, Y, T) = F(A \setminus (T \cap A))$$

Rose, das sieht der bekannten Fundamentalgruppe deutlich ähnlicher.

2. Bsp: $Y = \overset{P}{\cdot} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\cdot}$

$$\Rightarrow \Pi_1(\mathcal{L}, Y, Y) = G_P \underset{G_y}{*} G_Q$$

$g_y = 1 \Rightarrow a^y_{a} = a^{\bar y}$, $F(\operatorname{edge} Y)$ fällt weg, da nur 0 Kante in $A-T$

(Genereller:
Y Baum $\Rightarrow \Pi_1(\mathcal{L}, Y, Y) = \varinjlim (\mathcal{L}, Y)$)

§2 Konstruktion von $\tilde{X}$

Wir konstruieren:

- einen Graphen $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathcal{L}, Y, T)$
- eine Wirkung von $\Pi = \Pi_1(\mathcal{L}, Y, T)$ auf $\tilde{X}$
- (einen Morphismus $p: \tilde{X} \to Y$, der einen Isomorphismus $\Pi \backslash \tilde{X} \to Y$ induziert)
- ~~Abb~~ Schnitte: $\text{vert}\, Y \to \text{vert}\, \tilde{X}$ und $\text{edge}\, Y \to \text{edge}\, \tilde{X}$
  $P \mapsto \tilde{P}$ $\quad y \to \tilde{y}$

Wir fordern: A Orientierung von Y

- Für $P \in \text{vert}\, Y$ gilt: Der Stabilisator $\Pi_{\tilde{P}} \subseteq \Pi$ von $\tilde{P} \in \tilde{X}$ ist $\Pi_{\tilde{P}} = G_P$
- Für $y \in \text{edge}\, Y$ gilt: Stabilisator $\Pi_{\tilde{y}} \subseteq \Pi$ von $\tilde{y}$ ist $\underset{\Pi_{\tilde{y}}=}{G_w^w} \subseteq G_{t(w)}$, wobei $w = \begin{cases} y & \text{falls } y \in A \\ \bar{y} & \text{falls } y \notin A \end{cases}$

$$G_w^w = \text{Im}\,(G_w \to G_{t(w)})$$

Das zwingt $\tilde{X}$ in eine bestimmte Form.
~~Knoten~~ ~~Element~~ Mengen sind disjunkte Vereinigung der Bahnen der Stabilisatoren.

$$\Rightarrow \text{vert}\, \tilde{X} = \coprod_{P \in \text{vert}\, Y} \Pi / \Pi_{\tilde{P}}$$

$$\text{edge}\, \tilde{X} = \coprod_{y \in \text{edge}\, Y} \Pi / \Pi_{\tilde{y}}$$

Es bleibt zu definieren: (Kanten von $\tilde{X}$)

1. $\overline{g\tilde{y}}$ Inverse
2. $o(g\tilde{y})$ Start $\qquad \tilde{y} = 1 \cdot \Pi_y$
3. $t(g\tilde{y})$ Ende

1. $\overline{g\tilde{y}} = g\tilde{\bar{y}}$ wohldef. da $\Pi_y = \Pi_{\bar{y}}$

2. $o(g\tilde{y}) = g\, g_y^{-e(y)}\, \widetilde{o(y)}$ $\qquad e(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \in A \\ 1 & \text{falls } y \notin A \end{cases}$

Damit das nicht zu ↯ führt.

Z: Für $h \in \Pi_y$: $h\, g_y^{-e(y)}\, \widetilde{o(y)} = g_y^{-e(y)}\, \widetilde{o(y)}$

$\Leftrightarrow \; g_y^{e(y)}\, \Pi_y\, g_y^{-e(y)} \subseteq \Pi_{o(y)} = G_{o(y)}$

3. $t(g\tilde{y}) = g\, g_y^{1-e(y)}\, \widetilde{t(y)}$

Damit haben wir einen Graph $\tilde{X}$,
eine Wirkung von Π auf $\tilde{X}$
und $\Pi \backslash \tilde{X} = Y$

Theorem 1

Sei $(\mathcal{G}, Y)$ ein Graph von Gruppen, T ein Spannbaum von Y, A eine Orientierung von Y. Dann ist $\tilde{X} = \tilde{X}(\mathcal{G}, Y, T)$ ein Baum.

Kein Beweis.

Bsp.: wie eben

1. $G_P = \{1\}$, $G_y = \{1\}$ $\quad \overset{\pi_1(Y,P)}{\shortparallel}$
   $\pi_1(\mathcal{L}, Y, T) = F(A \setminus (T \cap A))$ und
   $\tilde{X}$ ist die universelle Überlagerung von Y

2. $Y = \overset{P}{\cdot} \xrightarrow{y} \overset{Q}{\cdot}$, $\cancel{\tilde{X}}$ $\pi_1(\mathcal{L}, Y, T) = G_P \underset{G_y}{*} G_Q$

   $\tilde{X}$ ist der assoziierte Baum aus §4

Wir halten fest:

$$G \cong \pi_1(\mathcal{L}, Y, T) \Rightarrow G \text{ wirkt auf einem Baum } \tilde{X}(\mathcal{L}, Y, T)$$

§3 Strukturtheorem

Sei X ein Graph, G eine Gruppe, die auf X wirkt.

Wir zeigen: wenn X ein Baum ist, kann G mit einer Fundamentalgruppe identifiziert werden

Sei T ein Spannbaum von $Y = G\backslash X$, A Orientierung von Y, und $j: T \to X$ ein Lift von T,
(d.h. $T \cong T' \subseteq X$ ~~Spann~~Baum)
hatten wir letzte Woche

Wir setzen j: edge $Y \to$ edge X fort, so dass $j\bar{y} = \overline{jy}$
Es reicht jy für $y \in A$ - edge T zu definieren.
da $y \notin A$ $\bar{y}$ ist, und jT schon definiert ist.
Wir wählen jy so, dass $o(jy) = j\,o(y)$
und $\gamma_y \in G$ so, dass $t(jy) = \gamma_y\, j\,t(y)$
Das ist möglich da $t(jy)$ und $j\,t(y)$ die gleiche Projektion $t(y)$ in $\underset{G\backslash X}{\text{vert } Y}$ haben.

Wir erweitern die Wahl von γ_y $\overset{\text{edge } Y \to G}{y \mapsto \gamma_y}$ auf ganz edge Y
durch $\gamma_{\bar{y}} = \gamma_y^{-1}$ und $\gamma_y = 1$ falls $y \in$ edge T.

Für jedes $y \in$ edge Y haben wir somit:

$$o(jy) = \gamma_y^{-e(y)}\, j\,o(y)$$
$$t(jy) = \gamma_y^{1-e(y)}\, j\,t(y)$$

Sei G_Q der Stabilisator der Ecke Q von X.
" G_Z " Kante Z "

Der Graph von Gruppen $(\mathcal{G}, Y)$ ist definiert durch $G_P = G_{jP} \subseteq G$ für $P \in \operatorname{vert} Y$

Stabilisator von jP

$G_y = G_{jy} \subseteq G$ für $y \in \operatorname{edge} Y$

Die Homomorphismen $G_y \to G_{t(y)}$ sind $a \mapsto a^y = \gamma_y^{e(y)-1} a \gamma_y^{1-e(y)}$

letzteres ist wohldefiniert, da $\gamma_y^{e(y)-1} G_{jy} \gamma_y^{1-e(y)} \subset G_{jt(y)}$ für alle $y \in \operatorname{edge} Y$

Sei $\phi : \pi_1(\mathcal{G}, Y, T) \to G$ der Homomorphismus, der durch die Inklusionen $G_P \to G$ und $\phi(g_y) = \gamma_y$ definiert wird.

Sei $\psi : \tilde{X}(\mathcal{G}, Y, T) \to X$ ein Morphismus von Graphen definiert durch
$\psi(g\tilde{P}) = \phi(g)\, jP$ und $\psi(g\tilde{y}) = \phi(g)\, jy$.

Sei W der kleinste Teilgraph, der für alle $y \in \operatorname{edge} Y$ jy enthält.

Jede Kante von W hat ein Ende in jT und es gilt $G \cdot W = X$

W ist enthalten in $\psi(\tilde{X})$ und ϕ induziert Isomorphismen zwischen den Stabilisatoren der entsprechenden Ecken und Kanten in $\tilde{X}$ und X.

ϕ und ψ sind injektiv. nach §4 Lemma 4.1

Weiter ist Ψ lokal injektiv, da ϕ die Isomorphismen induziert.

Theorem 2: Strukturtheorem

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist ein Baum

(ii) $\tilde{X} \xrightarrow{\Psi} X$ ist ein Isomorphismus

(iii) $\pi_1(\mathcal{L}, Y, T) \xrightarrow{\phi} G$ ist ein Isomorphismus.

Bew.:

(1) $\Rightarrow$ (2): folgt aus Lemma 5 von 4.5, da Ψ surjektiv und lokal injektiv ist.

(2) $\Rightarrow$ (1): folgt aus Theorem 1 ($\tilde{X}$ ist Baum)

(3) $\Rightarrow$ (2): klar, da Ψ über ϕ definiert ist.

(2) $\Rightarrow$ (3): Z: $\ker(\phi)$ ~~ist~~ $= \{1\}$

A: $\ker(\phi) \neq \{1\}$

Sei $P \in \operatorname{vert} Y$.

$\ker(\phi) \cap G_{\tilde{P}} = \{1\}$, da ϕ einen Isomorphismus $G_{\tilde{P}} \to G_{jP}$ definiert.

Sei $n \in \ker(\phi)$, $n \neq 1$. Dann sind die Ecken $\tilde{P}$ und $n\tilde{P}$ unterschiedlich und haben das gleiche Bild jP in X unter Ψ. $\lightning$ Ψ ist injektiv. $\square$