

Darstellung von endlichen Gruppen.

Insbesondere von $PSL_2(q)$

1 § Darstellungstheorie:

1.1. Def.: Sei G eine Gruppe. Eine Darstellung von G ist ein Paar (π, V) , wobei V ein komplexer Vektorraum ist und $\pi: G \rightarrow GL(V)$ ein Homomorphismus

[Erinnerung: $GL(V) = \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ bij. lin. Abb.}\}$]

Wir nennen $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ den Grad der Darstellung.

1.2 Bsp.: Für eine Gruppe G

- ist $\pi: G \rightarrow GL(V)$, g. i. d., eine triviale Darstellung
- induziert $\pi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$ (Homomorphismus) eine Darstellung von Grad 1

1.3 Bsp.: Für $G = \text{Sym}(3)$ und $V = \mathbb{C}^3$ bildet

$$\pi: \text{Sym}(3) \rightarrow GL_3(\mathbb{C})$$

$$g \mapsto (e_{\pi(g)}, e_{\pi(g)}, e_{\pi(g)}) \leftarrow \text{"Vertauschungs" Matrix}$$

$(\pi, \mathbb{C}^3)$ eine Darstellung von Grad 3.

1.4 Def.: Ist (π, V) Darstellung einer Gruppe G und W ein Untervektorraum von V , so nennen wir W π -invariant falls gilt: $(\forall g \in G: \pi(g)(W) = W)$

1.5 Bsp.: Im Fall der Darstellung aus 1.3, bildet

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{C}^3 \quad \text{einen } \pi\text{-invarianten UVR.}$$

1.6. Def. Eine Darstellung (π, V) mit $V \neq \{0\}$ heißt irreduzibel, falls $\{0\}$ und V die einzigen π -invarianten UVR sind.

1.7 Def. Seien (π, V) und (ρ, W) Darstellungen von G .

a) Eine lin. Abb. $T: V \rightarrow W$ verknüpft π und ρ , falls gilt: $\forall g \in G: T \circ \pi(g) = \rho(g) \circ T$

Also falls folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\pi(g)} & V \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ W & \xrightarrow{\rho(g)} & W \end{array}$$

Wir definieren außerdem:

$$\text{Hom}_G(\pi, \rho) = \{T: V \rightarrow W \mid T \text{ verknüpft } \pi \text{ und } \rho\}$$

b) Wir nennen π und ρ äquivalent, falls es einen invertierbare lin. Abb. in $\text{Hom}_G(\pi, \rho)$ g.b.t.

Für diese gilt dann offensichtlich: $\forall g \in G: \rho(g) = T \circ \pi(g) \circ T^{-1}$

(Bem.: In diesem Fall gilt: $V \cong W$ und $\rho(g)$ und $\pi(g)$ haben gleiches char. Pol.)

Darst. Matrizen für $g \in G$

1.8 Thm (Schur's Lemma)

Sind (π, V) und (ρ, W) irred. Darstellungen von G mit endlichem Grad, so gilt:

$$\dim_G \text{Hom}_G(\pi, \rho) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \pi \text{ und } \rho \text{ nicht äquiv.} \\ 1 & \text{falls } \pi \text{ und } \rho \text{ äquivalent sind} \end{cases}$$

1.9 Bew.: Zeige zunächst: $\dim_G \text{Hom}_G(\pi, \rho) \neq 0 \Rightarrow \pi$ und ρ äquiv.

Sei also $\dim_G \text{Hom}_G(\pi, \rho) \neq 0$

$\Rightarrow \exists T \in \text{Hom}_G(\pi, \rho) : T \neq 0$ T ist nicht konst. 0-Abb.

$\Rightarrow \ker(T)$ ist ein π -invarianter UVR von V

und $\text{Bild}(T)$ ist ein ρ -invarianter UVR von W

$\Rightarrow \ker(T) \neq V$ und $\text{Bild}(T) \neq \{0\}$ da T nicht 0-Abb.

$\Rightarrow \ker(T) = \{0\}$ und $\text{Bild}(T) = W$ da π und ρ irreduzibel

$\Rightarrow T$ inj. und T surj. $\Rightarrow T$ invertierbar $\Rightarrow \pi$ und ρ äquiv.

Als nächstes zeige: π und ρ äquiv $\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi, \rho) = 1$

Seien also π und ρ äquivalent. $\exists \pi = \rho$ siehe 1.7 b)

Sei T eine lin. Abb., die π und π verknüpft.

Dann besitzt T als Abb. von V nach V ($\mathbb{C}$ -VR)

mindest einen Eigenwert λ . Also gilt:

$$\ker(T - \lambda \cdot \text{id}_V) \neq \{0\}$$

Außerdem ist $\ker(T - \lambda \cdot \text{id}_V)$ ein π -invarianter UVR und da π irreduzibel ist folgt:

$$\ker(T - \lambda \cdot \text{id}_V) = V$$

Also $T = \lambda \cdot \text{id}_V$. Da $T \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi, \pi)$ bel. man folgt

da $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi, \pi) = \{f_{\lambda}: V \rightarrow V \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi, \pi) = 1$ $\square$

1.10 Def.: Seien (π, V) und (ρ, W) Darstellungen der Gruppe G .

a) Die konjugierte Darstellung von G bzgl. (π, V) ist (π^*, V^*) . Wobei $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$ der Dualraum von V ist und π^* geg. ist durch:

$$\forall g \in G \forall x \in V \forall f \in V^*: (\pi^*(g)f)(x) = f(\pi(g^{-1})x)$$

b) Die direkte Summe von π und ρ ist $(\pi \oplus \rho, V \oplus W)$. Wobei $V \oplus W$ die direkte Summe der VR ist und $(\pi \oplus \rho)$ geg. ist durch:

$$\forall g \in G \forall v \in V \forall w \in W: ((\pi \oplus \rho)(g))(v, w) = (\pi(g)v, \rho(g)w)$$

c) Das tensor Produkt von π und ρ ist $(\pi \otimes \rho, V \otimes W)$ wobei $V \otimes W$ das tensor Produkt der VR ist und $(\pi \otimes \rho)$ eind. def. ist durch:

$$\forall g \in G \forall v \in V \forall w \in W: ((\pi \otimes \rho)(g))(v \otimes w) = \pi(g)v \otimes \rho(g)w$$

(Bem.: Durch a), b) und c) sind Darstellungen von G geg.)

Prop. 1.11 Ist (π, V) Darstellung einer endl. Gruppe G so gilt:

- Es gibt ein hermetisches Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ auf V , das invariant unter $\pi(G)$ ist (also $\forall g \in G \forall v_1, v_2 \in V: \langle \pi(g)v_1 | \pi(g)v_2 \rangle = \langle v_1 | v_2 \rangle$)
- Zu jedem π -invarianten UVR W von V gibt es einen π -invarianten UVR W' von V mit $W \cap W' = \{0\}$ und $W + W' = V$
- Ist $V \neq \{0\}$, so ist π äquivalent zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen von G . $(V_1 \oplus \dots \oplus V_n = V) \quad (\pi_1 \oplus \dots \oplus \pi_n = \pi)$

Def. 1.12 Sei (π, V) Darst. der Gruppe G . Die charakteristische Funktion von π ist dann geg. durch:
 $\chi_\pi: G \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto \text{spur}(\pi(g))$

Bem. 1.13. Für zwei Darstellungen (π, V) und (ρ, W) von G rechnet man leicht folgende Eigenschaften nach:

- $\forall g \in G \quad \chi_{\pi^{-1}}(g) = \chi_\pi(g^{-1})$
- $\chi_{\pi \oplus \rho} = \chi_\pi + \chi_\rho$
- $\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \cdot \chi_\rho$
- sind π und ρ äquivalent, dann ist $\chi_\pi = \chi_\rho$

$$G \text{ endl.} \quad \begin{cases} \text{vi) } \chi_\pi(1) = \dim_{\mathbb{C}} V \\ \text{vii) } \forall g \in G: \chi_\pi(g) = \overline{\chi_\pi(g^{-1})} \\ \text{viii) } \forall g, h \in G: \chi_\pi(g) = \chi_\pi(hgh^{-1}) \end{cases}$$

Def. 1.14 Wir definieren ein Skalarprodukt für Funktionen $f_1, f_2: G \rightarrow \mathbb{C}$ und die endl. Gruppe G :
 $\langle f_1, f_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$

1.15 Thm.: Sind (π, V) und (ρ, W) Darstellungen der endl. Gruppe G , so gilt:

$$\langle \chi_\rho | \chi_\pi \rangle_G = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, \rho)$$

1.16 Kor.: Ist (π, V) Darstellung der endl. Gruppe G und $V \neq \{0\}$, so gilt:

$$\pi \text{ ist irreduzibel} \Leftrightarrow \langle \chi_\pi | \chi_\pi \rangle_G = 1$$

1.17 Bew.:

" $\Rightarrow$ " Ist π irreduzibel so gilt Satz (1.8)

$$\langle \chi_\pi | \chi_\pi \rangle_G \stackrel{1.15}{=} \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, \pi) \stackrel{!}{=} 1$$

" $\Leftarrow$ " Sei π nicht irreduzibel. Dann gibt es einen nicht-trivialen UVR W , der π -invariant ist. (Def 1.6)

Außerdem gibt es $W' \subseteq V$, der ebenso π -invarianter UVR von V ist (Prop. 1.11 b) mit $V = W \oplus W'$

Dann sind $f_1: W \oplus W' \rightarrow W \oplus W'$

$$(w, w') \mapsto (w, 0)$$

$$f_2: W \oplus W' \rightarrow W \oplus W'$$

$$(w, w') \mapsto (0, w')$$

linear unabhängig im VR: $\text{Hom}_G(\pi, \pi)$

$$\Rightarrow 2 \leq \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_G(\pi, \pi) \stackrel{1.15}{=} \langle \chi_\pi | \chi_\pi \rangle_G$$

1.18 Thm Sind (π, V) eine Darstellung, G eine Gruppe und (π_i, V_i) eine irreduzible Darstellung von G für alle $i \in I$ mit: $V = \bigoplus_{i \in I} V_i^{n_i}$

$$\pi = \bigoplus_{i \in I} n_i \pi_i$$

$$n_i \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I$$

Dann ist diese ~~Darstellung~~ Zerlegung eindeutig bis auf Reihenfolge und Äquivalenz.

1.19. Thm Sind (π, V) und (ρ, W) zwei Darstellungen einer Gruppe mit $\chi_\pi = \chi_\rho$, dann sind π und ρ äquivalent.

Jede andere irreduzible Darstellung, tritt bis auf Äquivalenz in gleicher Vielfachheit in der jeweiligen Zerlegung auf.

Insb. kann gezeigt werden, dass eine endl. Gruppe G mindestens $|G|$ irreduzible nicht äquivalente Darstellungen besitzt.

1.20. Korollar: Sind $(\rho_1, W_1), \dots, (\rho_n, W_n)$ die nicht äquivalenten, irreduziblen Darstellungen der endl. Gruppe G und $n_i = \dim_{\mathbb{C}} W_i$ (der Grad von (ρ_i, W_i)), dann gilt:

$$|G| = \sum_{i=1}^n n_i^2$$

§2 Darstellungen von $PSL_2(q)$

2.1. Thm. Ist $q \geq 5$ eine Primzahl, dann ist der Grad jeder nicht trivialen Darstellung von $PSL_2(q)$ mindestens $\frac{q-1}{2}$.

2.2. Beweisidee: Erinnerung $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_q^*, b \in \mathbb{F}_q \right\}$
 wobei $\ell: SL_2(q) \rightarrow PSL_2(q)$ die kanon. Einb.
 - Eine nicht triv. Darst. (π, V) einschränken auf $\pi|_{B_0}$ ($PSL_2(q)$ ist einfach)
 - $\pi|_{B_0}$ kann nun als Summe irred. Darst. geschrieben werden (deren Grad ist entweder 1 oder $\frac{q-1}{2}$)
 - Da $\pi|_{B_0}$ nicht trivial ist kommt mind. ein Summand mit Grad $\frac{q-1}{2}$ vor $\rightarrow \square$

Nachtrag / Ergänzung / Erinnerung

Zu Def. 1.10 c): Das tensor Produkt:

Sind V, W K -Vektorräume und

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot (v_i, w_i) \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in V, w_i \in W \right\}$$

Weiter sei

$$H_1 = \{ (v_1 + v_2, w_1) - (v_1, w_1) - (v_2, w_1) \mid v_1, v_2 \in V, w_1 \in W \}$$

$$H_2 = \{ (v_1, w_1 + w_2) - (v_1, w_1) - (v_1, w_2) \mid v_1 \in V, w_1, w_2 \in W \}$$

$$H_3 = \{ (\alpha v_1, w_1) - (v_1, \alpha w_1) \mid \alpha \in K, v_1 \in V, w_1 \in W \}$$

$$H_4 = \{ \alpha (v_1, w_1) - (\alpha v_1, w_1) \mid \alpha \in K, v_1 \in V, w_1 \in W \}$$

Dann ist das Tensor Produkt von V und W

$$V \otimes W = G / (H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4)$$

Zu Prop. 1.11: Bew: a) Sei $(\cdot, \cdot)$ ein hermetisches

Skalarprodukt auf V , so definiere für $v_1, v_2 \in V$ bel.:

$$\langle v_1, v_2 \rangle := \sum_{h \in G} (\pi(h)v_1, \pi(h)v_2)$$

Mit dieser Definition gilt dann für $g \in G$ und $v_1, v_2 \in V$:

$$\langle \pi(g)v_1, \pi(g)v_2 \rangle = \sum_{h \in G} (\pi(h)\pi(g)v_1, \pi(h)\pi(g)v_2)$$

$$\begin{aligned} & \text{(\pi-Homom.)} \\ & = \sum_{h \in G} (\pi(hg)v_1, \pi(hg)v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(Indexänderung)} \\ & = \sum_{h \in G} (\pi(h)v_1, \pi(h)v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle \end{aligned}$$

b) Zu gegebenem W definiere

$$W' = \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ f. a. } w \in W \} \text{ (offens. u. untd. erf.)}$$

Zeige die π -Invarianz: Für $w \in W'$, $v \in W$ und $g \in G$ gilt:

$$\langle \pi(g)w, v \rangle = \langle \pi(g^{-1})\pi(g)w, \pi(g^{-1})v \rangle = \langle w, \underbrace{\pi(g^{-1})v}_{\substack{\in W, \text{ da} \\ W \text{ } \pi\text{-inv.}}} \rangle = 0$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist
 $\pi(G)$ -inv.

π -Homom.

$\in W$, da
 W π -inv.

Also $w \in W' \Rightarrow (\pi(g)w) \in W'$ also W' π -inv.

c) Beweis per Induktion über $\dim_{\mathbb{C}}(V)$:

IA: $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 1 \rightarrow$ Darstellung ist irreduzibel.

IV: Gelte obige Aussage für alle Vektorräume mit niedrigerer Dimension als V .

IS: Fall 1: (π, V) ist irreduzibel ✓

Fall 2: (π, V) ist nicht irreduzibel, also ex.
nicht trivialer UVR W , der π -invariant
ist, Wähle W' wie in b). Man
gilt: $W' \oplus W = V$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W) < \dim_{\mathbb{C}}(V)$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(W') < \dim_{\mathbb{C}}(V)$$

Nach IV kann $\pi|_W$ also Darstellung
von G nun in irreduzible Darstellungen
zerlegt werden (als Summe solcher geschrieben).

Ebenso $\pi|_{W'}$. Durch $f: W \oplus W' \rightarrow V$

$$(w, w') \mapsto w + w'$$

wird die Äquivalenz von $\pi|_{W \oplus W'} \oplus \pi|_W$ und
 π erzeugt.

Die Aussage folgt durch Induktion.