

Ausarbeitung zum Seminarvortrag zum Thema "Amalgame und Bäume"

Jonas Flechsig
Hoher Heckenweg 99
48147 Münster
Matrikelnummer: 407013
Ein-Fach-Bachelor Mathematik mit Nebenfach Physik
6.Fachsemester
E-Mail: j_flec02@uni-muenster.de

Münster, den 2.Mai 2016

Westfälische Wilhelms Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
Seminar Gruppentheorie und Geometrie: Gruppen, Expandergraphen und Bäume
Prof.Dr. Linus Kramer mit Dr. Olga Varghese
SoSe 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Definitionen und Beispiele zu elementaren Begriffen	1
3	Die Untersuchung von Gruppenwirkungen auf Graphen	3
4	Untergruppen von Amalgamen aus zwei Faktoren	12
5	Die Verallgemeinerung auf ein Amalgam aus mehr Faktoren	15

1 Einleitung

Die gesamte Ausarbeitung beruht auf dem Kapitel "Trees and Amalgams" aus dem Buch "Trees" von J.P. Serre_[2]. In dem Buch wie in unserem Seminar werden Gruppenwirkungen auf Graphen untersucht, um die Struktur von Gruppen aufzuarbeiten. Bisher haben wir Amalgame, Graphen und Gruppenwirkungen auf Graphen unabhängig voneinander studiert. Nun wollen wir erfahren, wie die Begriffe in Verbindung zueinander stehen.

Im ersten Teil der Ausarbeitung werden Feststellungen zu den Gruppenwirkungen auf Graphen und Bäumen gemacht. In der Folge beschränken wir uns auf den Fall, dass es sich bei der wirkenden Gruppe um ein Amalgam aus zwei Faktoren handelt. Mittels der zuvor getroffenen Aussagen über die Wirkungen erhalten wir Informationen über die Struktur von beschränkten Untergruppen des Amalgams. Im dritten Teil des Kapitels wird das zuvor für Amalgame aus zwei Faktoren studierte Konzept auf Kolimiten verallgemeinert.

2 Definitionen und Beispiele zu elementaren Begriffen

Zunächst führe ich einige Definitionen auf, die in der Ausarbeitung vorkommen. Das Konzept der Gruppen und Gruppenwirkungen werde ich dabei voraussetzen und nur spezielle Eigenschaften und einige Notationen in meinen Ausführungen erwähnen. Ebenso werde ich Graphen als bekannt voraussetzen. Alle Grundlagen sind in den Vorlesungsnotizen zur Geometrischen Gruppentheorie I von Professor Kramer nachzulesen_[1].

2.1 Notation Die *Eckenmenge* eines Graphen X werde ich mit $vertX$ und die *Kantenmenge* mit $edgeX$ bezeichnen.

2.2 Definition y_0 bezeichne den Startpunkt und y_1 den Endpunkt der orientierten Kante y .

2.3 Definition Ein Graph X heißt *Segment* genau dann, wenn X isomorph zu einem Graph ist, der die Ecken p und q durch die Kanten y und \bar{y} verbindet, wobei $p \neq q$ gilt.

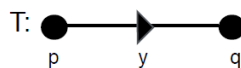


Abbildung 1: Segment bestehend aus den Ecken p und q und der Kante y

2.4 Definition Sei G eine Gruppe, die auf einem Graph X wirkt. Wir sagen G wirkt *ohne Inversion* genau dann, wenn keine Kante y existiert, die auf ihre umgekehrte Kante \bar{y} abgebildet wird. (Dies ist gleichbedeutend mit: $\nexists y \in edge X$ und $g \in G$, sodass gilt $g(y) = \bar{y}$.)

2.5 Definition Wirkt die Gruppe G ohne Inversion auf dem Graphen X , so definieren wir den *Quotientengraph* $G \backslash X$ wie folgt:

$vert(G \backslash X) = G \backslash vertX = \{ G(p) \mid p \in vertX \}$ bezeichnet die Eckenmenge des Quotientengraphen und $edge(G \backslash X) = G \backslash edgeX = \{ G(y) \mid y \in edgeX \}$ die Kantenmenge des Quotientengraphen. Die Abbildung, die einer Kante ihren Start- und Endpunkt zuweist, definieren wir dabei als

$G \setminus \text{edge} X \rightarrow G \setminus \text{vert} X \times G \setminus \text{vert} X, G(y) \mapsto (G(y_0), G(y_1))$.

Die Ecken und Kanten bestehen aus den Äquivalenzklassen der Bahnen, wobei wir bei den Kanten die positiv und negativ orientierten Kanten unterscheiden.

In Beispiel §2.6 betrachten wir mittels des Cayley-Graphen ein Beispiel für einen Quotientengraphen.

2.6 Beispiel Der Cayley-Graph $X = X(G, S)$, wobei $S \subseteq G$ eine Teilmenge von G ist, besteht aus der Eckenmenge $\text{vert} X(G, S) = G$ und den positiv orientierten Kanten $\text{edge}_+ X = \{(g, gs) | g \in G, s \in S\}$. Die negativ orientierten Kanten bestehen aus einer formalen Kopie der positiv orientierten Kanten. Dementsprechend ergeben sich nach Definition §2.5 $G \setminus G \cong \{1\}$ als Eckenmenge des Quotientengraphen und die positiv orientierten Kanten $G \setminus \text{edge}_+ = G \setminus \{(g, gs) | g \in G, s \in S\}$ des Quotientengraphen. Die negativ orientierten Kanten erhalten wir als formale Kopie der positiv orientierten Kanten.

Wählen wir $G = \mathbb{Z}$ und $S = \{2, 3\}$ und lassen die Gruppe durch Addition auf dem Cayley-Graphen wirken, so erhalten wir als Eckenmenge $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z} \cong \{1\}$ und als positiv orientierte Kanten $\mathbb{Z} \setminus \text{edge}_+ X(\mathbb{Z}, \{2, 3\}) = \{(z, z+2), (z, z+3) | z \in \mathbb{Z}\}$. Da aber die Eckenmenge des Quotientengraphen $\text{vert}(G \setminus X) \cong \{1\}$, entsteht als Quotientengraph ein Graph der Form wie in Abbildung 2. Intuitiv verstehen wir unter dem Quotientengraphen also den Graphen, der alle Ecken, die durch die Wirkung der Gruppe aufeinander verschoben werden können, zu einer Ecke zusammenzieht. Die Kanten des Quotientengraphen können wir dann als Verbindung zweier Punkte verstehen, die eindeutig durch die Ecken festgelegt ist.

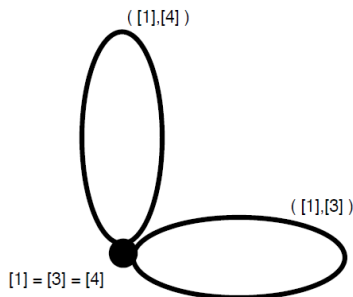


Abbildung 2: Quotientengraph des Cayley-Graphen $X(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ bezüglich der Wirkung von \mathbb{Z} durch Addition

Das folgende Beispiel soll erläutern, warum wir in der Definition des Quotientengraphen verlangen, dass die Gruppe G ohne Inversion auf dem Graphen X wirkt.

2.7 Beispiel Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$. Dabei stabilisiert 0 die Kante, also insbesondere die Ecken, des Graphen in Abbildung 3. 1 vertauscht die Ecken und invertiert somit die Kante. Weiter ist in der Abbildung der entstehende Quotientengraph $G \setminus X$ abgebildet. Offensichtlich enthält der Quotientengraph nur eine Kante und kann daher kein orientierter Graph sein. Wenn man eine Gruppe auf einem Graph wirken lässt und dabei die Inversion von Kanten zulässt, dann erhält man als Quotientengraph keinen wohldefinierten Graphen.

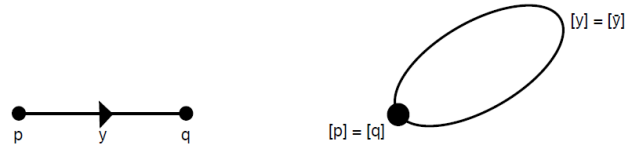


Abbildung 3: Links: Segment auf dem $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mit Inversion wirkt, rechts: entstehender "Quotientengraph", der nicht orientierbar ist

3 Die Untersuchung von Gruppenwirkungen auf Graphen

In der Folge sollen alle Gruppen, die wir auf Graphen wirken lassen, Wirkungen ohne Inversion definieren.

3.1 Definition Die Gruppe G wirkt auf dem Graphen X . Wir nennen T einen *Fundamentaltbereich* des Quotientengraphen $G \setminus X$ genau dann, wenn T ein Teilgraph von X ist und $T \cong G \setminus X$.

3.2 Bemerkung Wie wir später beweisen werden, existieren Fundamentaltbereiche nicht immer. An Beispielen werden wir außerdem sehen, dass Fundamentaltbereiche nicht eindeutig sind.

Um die Relevanz von Fundamentaltbereichen zu verstehen, wollen wir uns einige Sätze des Kapitels anschauen.

3.3 Proposition G sei eine Gruppe, die auf dem Baum X wirkt. Es existiert genau dann ein Fundamentaltbereich T , wenn der Quotientengraph $G \setminus X$ ein Baum ist.

Beweis. Die Hinrichtung folgt mittels einer Proposition eines Kapitels zuvor. Die Rückrichtung lässt sich elementar mit unserem Wissen über Bäume beweisen.

" \Leftarrow ": Da $G \setminus X$ ein Baum ist, existiert mit Hilfe einer Proposition aus dem Buch von Serre (Vgl. Serre, 1980, §3.1, Prop.14, S.25_[2]) ein Fundamentaltbereich.

Die Proposition besagt, dass für einen zusammenhängenden Graphen, auf dem eine Gruppe wirkt, jeder Teilbaum von $G \setminus X$ auf einen Teilbaum von X geliftet werden kann.

Da $G \setminus X$ als Baum insbesondere ein zusammenhängender Graph und damit ein Teilbaum von sich selbst ist, finden wir nach der Proposition einen Lift φ , der $G \setminus X$ auf einen Teilbaum $T \subseteq X$ abbildet, so dass das Diagramm in Abbildung 4 kommutiert. Es gilt also $\pi \circ \varphi = \text{id}_{G \setminus X}$.

Behauptung: Jetzt ist $\pi|_{\varphi(G \setminus X)}: \varphi(G \setminus X) \rightarrow G \setminus X$ ein Isomorphismus.

Die Homomorphieeigenschaft erhalten wir, da π eine Projektion des Graphen X auf den Quotientengraphen $G \setminus X$ ist.

Die Surjektivität von π erhalten wir, da $\pi \circ \varphi = \text{id}_{G \setminus X}$ gilt und die Identität insbesondere surjektiv ist.

Zu prüfen bleibt die Injektivität. Seien x und y beliebige Ecken im Bild $\varphi(G \setminus X)$ mit $\pi(x) = \pi(y)$. Da x und y im Bild von φ liegen, gilt $x = \varphi(Gp)$ und $y = \varphi(Gq)$. Und wegen $\pi \circ \varphi = \text{id}_{G \setminus X}$ gilt $Gp = \pi(\varphi(Gp)) = \pi(\varphi(Gq)) = Gq$. Folglich gilt $Gp = Gq$ und damit auch $x = \varphi(Gp) = \varphi(Gq) = y$. Es folgt die Injektivität der Abbildung $\pi|_{\varphi(G \setminus X)}$. Wir erhalten also einen Isomorphismus $\pi|_{\varphi(G \setminus X)}$ vom Teilbaum $\varphi(G \setminus X)$ in X auf den Quotientengraph $G \setminus X$ und können $\varphi(G \setminus X) = T$ als Fundamentalbereich wählen.

” \Rightarrow “: Da X als Baum ein nicht leerer Graph ist, folgt, dass $G \setminus X$ nicht leer ist. Außerdem ist $G \setminus X$ zusammenhängend, denn:

Für zwei beliebige Ecken Gp und Gq in der Eckenmenge des Quotientengraphen lassen sich zwei Repräsentanten, z.B. p und q , auswählen. Da X zusammenhängend ist, lassen sich p und q durch einen Kantenweg (w_0, \dots, w_n) mit $(w_0)_0 = p$ und $(w_n)_1 = q$ verbinden. Dieser Kantenweg repräsentiert nach Definition des Quotientengraphen einen Kantenweg (Gw_0, \dots, Gw_n) , der Gp und Gq verbindet.

Folglich ist nach der Voraussetzung und der Definition eines Fundamentalbereiches in §3.1 T ein nicht leerer Teilgraph des Baumes X , der isomorph zum Quotientengraph $G \setminus X$ ist. Also ist T auch zusammenhängend, da T isomorph zu $G \setminus X$ ist. Damit ist T als zusammenhängender Teilgraph eines Baumes ein Baum. Daraus folgt, dass auch der Quotientengraph $G \setminus X$ ein Baum ist. \square

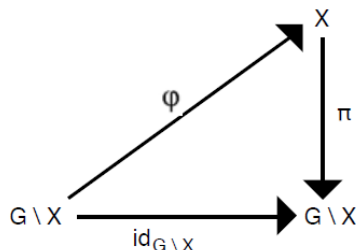


Abbildung 4: Kommutatives Diagramm mit dem Lift φ des Quotientengraphen $G \setminus X$ auf den Graphen X , für den Fall das X ein Baum ist und der Quotientengraph ebenfalls ein Baum ist.

Betrachten wir nun ein Beispiel zur Proposition §3.3.

3.4 Beispiel Dazu lassen wir die Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, wie in Abbildung 5 gezeigt, auf einem Baum X wirken. Wir erhalten als Quotientengraph den in Abbildung 5 dargestellten Graphen. Hierbei handelt es sich offenbar um ein Segment, also insbesondere einen Baum. Nach Proposition §3.3 existiert also ein Fundamentalbereich T . Tatsächlich finden wir einen Fundamentalbereich, da jede Kante im Baum X isomorph zu einem Segment T ist.

Wir bemerken also, dass der Fundamentalbereich T nicht eindeutig ist.

3.5 Definition Die Gruppe G wirkt auf dem Graph X . Die *Stabilisatoren* einer Ecke $p \in \text{vert}X$ werde ich mit G_p bezeichnen. $G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$. Analog werden für Kanten $y \in \text{edge}X$ die Stabilisatoren G_y definiert.

Für die Stabilisatoren von entgegengesetzt verlaufenden Kanten gilt $G_y = G_{\bar{y}}$.

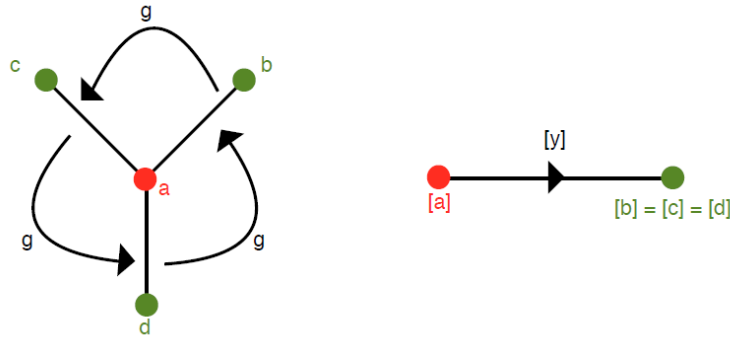


Abbildung 5: Erklärung der Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auf dem Graphen mit den Ecken a,b,c und d

Im Folgenden wollen wir das Konzept der Gruppenwirkungen nutzen, um Amalgame aus zwei Faktoren zu charakterisieren.

Wir werden herausfinden: Eine Gruppe ist isomorph zu einem Amalgam aus zwei Faktoren, wenn die Gruppe auf einem Baum mit einem Segment als Fundamentalbereich wirkt.

3.6 Theorem Sei G eine Gruppe, die auf einem Graphen X wirkt. T sei ein Segment bestehend aus den Ecken p und q und den Kanten y und \bar{y} . T sei außerdem ein Fundamentalbereich des Quotientengraph $G \backslash X$.

X ist genau dann ein Baum, wenn der Homomorphismus $\lambda: G_p *_{G_y} G_q \rightarrow G$, der durch die Inklusionen $G_p \hookrightarrow G$ und $G_q \hookrightarrow G$ induziert wird, ein Isomorphismus ist.

Beweis.

Zu zeigen ist die Wohldefiniertheit des Amalgams. Dazu zeigen wir, dass $G_y = G_p \cap G_q$ ist. Weiter besteht der Beweis im Wesentlichen aus den folgenden zwei Lemmata §3.8 und §3.9.

Wohldefiniertheit:

" \subseteq ": $g \in G_y \Rightarrow gy = y \Rightarrow gy_0 = gp = p$ und $gy_1 = gq = q \Rightarrow g \in G_p \cap G_q$.

" \supseteq ": $g \in G_p \cap G_q \Rightarrow gp = p$ und $gq = q \Rightarrow gy_0 = y_0$ und $gy_1 = y_1$ und damit gilt sogar: $gy = y$, da wir die Kante y als Verbindung von der Ecke p zur Ecke q verstehen. Also ist $g \in G_y$.

Nun lässt sich das Amalgam mittels kanonischer Inklusionen $G_y \hookrightarrow G_p$, $G_y \hookrightarrow G_q$ auffassen.

Die weiteren Beweisschritte sind Bemerkung §3.10 zu entnehmen.

3.7 Bemerkung G sei eine Gruppe, die auf einem zusammenhängenden Graphen X wirkt. Dann ist auch gX zusammenhängend, da die Graphen X und gX mittels Wirkung von g auf X und g^{-1} auf gX insbesondere isomorph sind.

3.8 Lemma Ein Graph X ist zusammenhängend genau dann, wenn $G = \langle G_p \cup G_q \rangle$

Beweis. Die Idee ist es, sich eine Gruppe zu definieren, die dem Erzeugnis der Stabilisatoren entspricht.

Sei X' die Zusammenhangskomponente von X , die den gewählten Fundamentalbereich T enthält. Wir können eine Zusammenhangskomponente wählen, die T enthält, da T selbst zusammenhängend ist.

Als G' definieren wir die Menge der Elemente in G , die X' stabilisieren, das heißt:

$$G' = \{g \in G \mid gX' = X'\}.$$

Weiter definieren wir $G'' = \langle G_p \cup G_q \rangle$.

Wir zeigen zunächst: $G' \supseteq G''$.

Sei $h \in G_p \cup G_q$. Dann haben T und hT eine gemeinsame Ecke, denn falls $h \in G_p$ ist $hp = p$ und $p \in T \cap hT$ (analog für $h \in G_q$). Wegen $T \subseteq X'$ und des Zusammenhangs von hT (siehe Bemerkung §3.7) gilt $hT \subseteq X'$. Folglich ist $\emptyset \neq hT \cap X' \subseteq hX' \cap X'$ und wir erhalten, dass der Schnitt von hX' und X' nicht leer ist. Da hX' zusammenhängend ist, gilt sogar $hX' \subseteq X'$. Weiter sind die Graphen X' und hX' nach Bemerkung §3.7 isomorph. Somit folgt bereits die Gleichheit $hX' = X'$. Folglich ist $h \in G'$. Da h ein Element aus einem Erzeugendensystem der Gruppe G'' war, gilt auf Grundlage der Definition einer Gruppenwirkung, dass auch beliebige Elemente der Gruppe G'' in G' enthalten sind.

” \Leftarrow “: Unter der Annahme, dass $G = G''$ gilt, erhalten wir mittels der oben gezeigten Teilmengeninklusion und der Inklusion $G' \subseteq G$, die nach der Definition von G' folgt, dass $G = G' = G''$ ist. Da $G = G'$ gilt, erhalten wir, dass für alle $g \in G$ $gX' = X'$, also $GX' = X'$ gilt. Weiter erhalten wir, da GT zusammenhängend und T ein Fundamentalbereich ist, dass $X' = GX' \supseteq GT = X$ gilt. Insgesamt erhalten wir, dass $X' \supseteq X$ gilt und $X' \subseteq X$ gilt nach Definition, woraus die Gleichheit von $X = X'$ folgt und X ein zusammenhängender Graph ist.

” \Rightarrow “: Zunächst prüfen wir, dass $X = G''T \dot{\sqcup} (G-G'')T$ gilt:

Da T ein Fundamentalbereich ist, erzeugt die Wirkung der Gruppe G auf T den gesamten Graphen X .

Nehmen wir an, dass die Mengen nicht disjunkt sind, dann existiert ein $x \in G''$ und ein $y \in (G-G'')$, sodass gilt: $x(T) = y(T)$. Diese Gleichung ist äquivalent zu $y^{-1}x(T) = T$. Da T ein Segment wie in Abbildung 1 ist, gilt entweder $y^{-1}x$ fixiert p (und somit auch q) oder $y^{-1}x$ bildet p auf q und q auf p ab.

Der zweite Fall führt zu einem Widerspruch, da dieser zu einer Inversion führt, G nach Voraussetzung aber ohne Inversion wirkt.

Bleibt der erste Fall: Hier gilt, dass $y^{-1}x(p) = p$ erfüllt ist. Daraus folgt, dass $y^{-1}x \in G_p \subseteq G''$. Mit $x \in G''$ erhalten wir mittels Multiplikation mit x^{-1} , dass $y^{-1} \in G''$ gilt. Dies steht im Widerspruch dazu, dass wir nach Annahme ein $y \in (G-G'')$ gewählt hatten.

Also ist $X = G''T \dot{\sqcup} (G-G'')T$ erfüllt.

Mit der Voraussetzung, dass $X = X'$ gilt und $G''T \cap X' \neq \emptyset$, erhalten wir, dass $X = X' \subseteq G''T$, da $G''T$ zusammenhängend ist und wir X disjunkt in $G''T$ und $(G-G'')T$ zerlegen können. Weiter ist $X \supseteq G''T$ nach der Definition der Wirkung erfüllt. Insgesamt erhalten wir:

$$G''T = X.$$

Nach der disjunkten Zerlegung von X in $G''T = X$ und $(G-G'')T$ erhalten wir $(G-G'')T = \emptyset$ und da $T \neq \emptyset$ gilt, folgt, dass $G'' = \langle G_p \cup G_q \rangle = G$ ist.

Somit erhalten wir, dass X genau dann zusammenhängend ist, wenn $G = \langle G_p \cup G_q \rangle$ gilt.

□

3.9 Lemma *Ein Graph X enthält genau dann keine Kreise, wenn $\lambda: G_p *_{G_y} G_q \rightarrow G$ injektiv ist.*

Beweis. Wir zeigen die Rückrichtung mittels Kontraposition und überlegen uns, dass die Hinrichtung genauso funktioniert.

” \Leftarrow ”: Zunächst stellen wir fest, dass X genau dann einen Kreis enthält, wenn ein reduzierter Kantenweg $c = (w_0, \dots, w_1)$ mit $n \geq 1$ existiert, für den $(w_0)_0 = (w_n)_1$ gilt. Die w_i lassen sich mittels der Wirkung umschreiben in $w_i = h_i y_i$ mit $h_i \in G$ und $y_i \in \{y, \bar{y}\}$. Diese Notation erhalten wir für beliebige Kanten, da T ein Fundamentalbereich mit den Kanten y und \bar{y} ist. Wir betrachten nun das Bild des Kreises unter der Wirkung der Gruppe G auf dem Graphen X . Der Quotientengraph ist isomorph zum Segment T . Da $w_i = h_i y_i$ gilt, tauchen die w_i entweder in der Bahn von y oder in der Bahn von \bar{y} auf. Bezeichnet man die Ecke $(y_i)_0 = (y_{i-1})_1$ als p_i und nimmt an, dass die Ecke p_i im Quotientengraph beispielsweise auf p abgebildet wird, dann ist aufgrund der Form von T bereits klar, dass die nächste Ecke im Kreis p_{i+1} auf q abgebildet werden muss. Die übernächste Ecke p_{i+2} wird wieder auf p abgebildet. Induktiv erhalten wir für die Kanten im Kreis, dass $\bar{y}_i = y_{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ gilt. Dies funktioniert offensichtlich nur für einen Kreis mit gerader Anzahl an Ecken, sodass wir schließen können, dass nur Kreise mit einer geraden Anzahl an Ecken existieren, sofern ein Fundamentalbereich die Form eines Segments hat.

Weiter gilt:

$$h_i p_i \stackrel{\text{Def.}}{=} h_i (y_i)_0 \stackrel{\text{GW}}{=} (h_i y_i)_0 \stackrel{\text{Def.}}{=} (h_{i-1} y_{i-1})_1 \stackrel{\text{GW}}{=} h_{i-1} (y_{i-1})_1 \stackrel{\text{Def.}}{=} h_{i-1} p_i$$

, wobei das Kürzel GW bedeutet, dass wir die Gleichheit auf Grundlage der Definition der Gruppenwirkung erhalten.

Definieren wir nun $g_i := h_{i-1}^{-1} h_i$ folgt, dass $g_i \in G_{p_i}$.

Wir wollen zeigen: $g_i \notin G_y = G_{\bar{y}}$.

Dazu nehmen wir an, dass g_i in $G_y = G_{\bar{y}}$ liegt. Dann erhalten wir:

$$\bar{w}_i = \overline{h_i y_i} = \overline{h_{i-1} g_i y_i} = \overline{h_{i-1} y_i} = h_{i-1} \bar{y}_i = h_{i-1} y_{i-1} = w_{i-1}.$$

Dies ist ein backtracking im Kreis, also nach der Definition eines Kreises als reduzierter, geschlossener Kantenweg verboten. Wir erhalten also $g_i \in G_{p_i} - G_y$.

Für ein Kreis ausgehend von der Ecke p_0 erhalten wir insgesamt:

$$h_0 p_0 = (w_0)_0 = (w_n)_1 = h_n (y_n)_1 = h_n p_0 = h_{n-1} g_n p_0 = h_0 g_1 \dots g_n p_0$$

mittels iterativem Einsetzen der Gleichung $g_i = h_{i-1}^{-1} h_i$.

Es folgt, dass $g_1 \dots g_n \in G_{p_0} - G_y$ gilt. Wenn wir annehmen, dass $p_0 = p$ - falls $p_0 = q$ gilt, können wir analog argumentieren - ist, verschiebt das Produkt $g_1 \dots g_n$ die Ecke q auf eine andere Ecke q' .

Da T ein Fundamentalbereich ist, existiert ein $g_0 \in G$, das p stabilisiert und für das gilt $g_0(q') = q$. Daraus folgt, dass $g_0 \dots g_n \in G_y$ ist und $\lambda(g_0 \dots g_n) = 1_G$. Da das Produkt nicht trivial ist, folgt, dass λ nicht injektiv ist.

” \Rightarrow “: Der Homomorphismus λ ist genau dann nicht injektiv, wenn es ein nicht triviales Element im Kern gibt. Angenommen, es existiert so ein nicht triviales Element g . Wir wählen eine Darstellung des Elements $g = g_0 \dots g_n$ mit $g_i \in G_{p_i} - G_y$, wobei $p_i \in \{p, q\}$. Betrachten wir eine Kante y_i , die die Ecken p_i und p_{i+1} verbindet: Da diese Kante im Fundamentalbereich der Wirkung enthalten ist, lässt sich jede beliebige Kante in X als $h_i y_i$ darstellen. Nun lassen sich analog zur Rückrichtung die Elemente g_i als $h_{i-1}^{-1} h_i$ darstellen und wir erhalten ausgehend von der Ecke p_0 einen Kreis. \square

3.10 Bemerkung Mit den Lemmata §3.8 und §3.9 erhalten wir den Beweis für Theorem §3.6.

” \Rightarrow “: Ein Baum ist nach Definition zusammenhängend und enthält keine Kreise. Mit Lemma 3.8 erhalten wir, dass $G = \langle G_p \cup G_q \rangle$ gilt. Mit Lemma 3.9 folgt, dass $G_p *_{G_y} G_q \rightarrow G$ injektiv ist. Da G von G_p und G_q erzeugt wird, ist die Abbildung außerdem surjektiv. Die Abbildung wird von den Inklusionen induziert, daher ist auch die Homomorphieeigenschaft klar.

” \Leftarrow “: Die Rückrichtung folgt, indem wir den Beweis der Hinrichtung rückwärts lesen, da wir in den beiden Lemmata jeweils die Äquivalenz bewiesen haben. Zudem gilt, wenn die Inklusionen einen Isomorphismus $G_p *_{G_y} G_q \rightarrow G$ implizieren, dann ist G das Erzeugnis von G_p und G_q .

Insgesamt folgt der Beweis von Theorem §3.6. \square

3.11 Beispiel Sei $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. G wirkt auf dem unten abgebildeten Baum X wie in der Abbildung 6 beschrieben. Es resultiert ein Quotientengraph, der die Form eines Segments hat. Also ist das Segment ein Fundamentalbereich von $G \backslash X$.

Nach dem vorangegangenen Theorem §3.6 ist G isomorph zu $G_p *_{G_y} G_q$. Tatsächlich erhalten wir, wie im Theorem behauptet: $G_p *_{G_y} G_q \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} *_{\{1\}} \{1\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

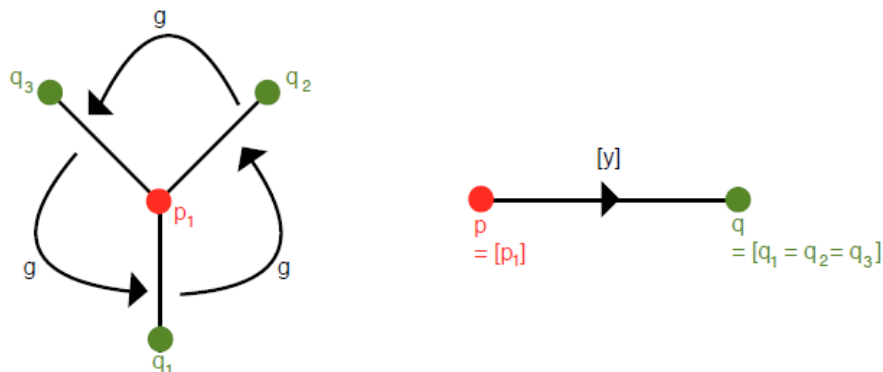


Abbildung 6: Wirkung auf einem Baum und entstehender Quotientengraph gemäß der Folgerung §5.12

Weiter betrachten wir den Fall, dass G ein Amalgam aus zwei Faktoren ist. Wir wollen zu der Gruppe G einen Graphen X assoziieren, auf dem G mit schönen Eigenschaften wirkt.

3.12 Theorem Sei $G = G_1 *_A G_2$ ein Amalgam aus zwei Faktoren, dann existiert ein Baum X , auf dem G mit einem Segment T , bestehend aus den Ecken $p = G_1$ und $q = G_2$ sowie den Kanten $y = (G_1, G_2)$ und $\bar{y} = (G_1, G_2)$, als Fundamentalbereich wirkt. Dabei sind $G_1 = G_p$, $G_2 = G_q$ und $A = G_y$ die Stabilisatoren der Bestandteile des Segments. Der Baum X ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis. Der Beweis funktioniert durch Angabe des Baumes (i), Definition der Wirkung (ii), Berechnung des Quotientengraphen (iii), Nachrechnen der Stabilisatoreigenschaften (iv), Überprüfung der Eigenschaft, dass X ein Baum ist (v) und Nachweis der Eindeutigkeit von X bis auf Isomorphie (vi).

(i): Die Eckenmenge des Graphen definieren wir als $\text{vert}X = G/G_1 \sqcup G/G_2$ und die Kantenmenge als $\text{edge}X = G/A \sqcup \overline{G/A}$, wobei der $\overline{G/A}$ die Kennzeichnung einer formalen Kopie der Menge G/A für die Menge der negativ orientierten Kanten beschreibt.

Der Übergang von einer Kante zum Start- und Endpunkt der Kante ist durch die Abbildung $(G/A) \rightarrow G/G_1 \times G/G_2$, $gA \mapsto (gG_1, gG_2)$ erklärt. $\overline{G/A} \rightarrow G/G_2 \times G/G_1$, $\overline{gA} \mapsto (gG_2, gG_1)$ definiert die Abbildung, die einer negativ orientierten Kante ihren Start- und Endpunkt zuordnet. Die entsprechenden Abbildungen werden dabei durch die Inklusionsabbildung $A \rightarrow G_i$ für $i = 1, 2$ induziert. Diese Abbildungen sind auf Grund der Definition des Amalgams, es folgt sogar $G_1 \cap G_2 = A$, wohldefiniert.

(ii): Definieren wir nun die Wirkung von G auf dem Graphen X : Dazu definieren wir eine Abbildung, die den Elementen in G einen Isomorphismus auf der Menge der Ecken zuordnet. Dabei definieren wir die Wirkung durch $G \times (G/G_1 \sqcup G/G_2) \rightarrow (G/G_1 \sqcup G/G_2)$, $(h, gG_i) \mapsto hgG_i$ für $i = 1, 2$ und $g \in G$ beliebig. Aufgrund der wohldefinierten Abbildung, die den Kanten ihre Start- und Endpunkte zuordnet, erhalten wir die Wirkung auf einer Kante mittels Betrachtung der Wirkung auf den Start- und Endpunkten.

(iii): Da alle Ecken des Graphen X von der Form hG_1 bzw. $h'G_2$ mit $h, h' \in G$ sind, sind mittels Wirkung der Inversen h^{-1} bzw. h'^{-1} alle Elemente in einer Bahn mit der Ecke G_1 bzw. G_2 . Da die Wirkung auf den Kanten mittels der Wirkung auf den Start- und Endpunkten definiert ist, gilt, dass sich alle Kanten in einer Bahn mit Kante A oder \overline{A} befinden. Daraus folgt, dass der Quotientengraph $G \backslash X$ isomorph zu dem Segment in Abbildung 1 ist.

(iv): Der Faktor G_i ist genau der Stabilisator der Ecke G_i im Fundamentalbereich für $i = 1, 2$ und im Amalgam gilt $A = G_1 \cap G_2$. Also stabilisiert A gerade die Kante A im Fundamentalbereich.

(v): Da der geforderte Isomorphismus vom Amalgam der Stabilisatoren des Fundamentalbereichs in die Gruppe G gerade durch die Identitätsabbildung gegeben ist, folgt aus Theorem §3.6, dass X ein Baum ist.

(vi): Zur Eindeutigkeit bis auf Isomorphie kann man annehmen, dass ein zweiter Baum Y existiert, sodass G auf dem Graphen Y mit einem Fundamentalbereich in Form eines Segments wirkt. $G_1 = G_{\tilde{p}}$, $G_2 = G_{\tilde{q}}$ und $A = G_{\tilde{y}}$ die Stabilisatoren des Segments für $\tilde{p}, \tilde{q} \in \text{vert}Y$ und

$\tilde{y} \in \text{edge}Y$. Es genügt zu überprüfen, dass $G_{\tilde{p}} \cong G_p$ und $G_{\tilde{q}} \cong G_q$ ist, denn daraus folgt, dass $G_{\tilde{y}} \cong G_y$ ist, da der Stabilisator einer Kante gerade der Schnitt der beiden Stabilisatoren der Ecken ist.

Weiter werden wir die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie nicht im Detail ausführen. □

3.13 Bemerkung Für den Spezialfall $A = \{1\}$ erhalten wir als Kantenmenge $\text{edge}X \cong G \sqcup \overline{G}$. Hierbei ist die Bedeutung von \overline{G} als formale Kopie der positiv orientierten Kanten zu beachten.

Mit Hilfe von zwei Beispielen werden wir nun die Bedeutung der beiden Theoreme erläutern. Wir werden jeweils ein Amalgam im Spezialfall aus Bemerkung §3.13 betrachten und den bis auf Isomorphie eindeutigen Baum, der nach Theorem §3.12 existiert zuordnen.

3.14 Beispiel Wir betrachten das Amalgam $G = G_1 * G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle g_1, g_2 | g_1^2, g_2^2 \rangle$. Offensichtlich gilt hier der bereits zuvor erwähnte Spezialfall $A = \{1\}$.

Um die Faktoren zu unterscheiden, nutzen wir die folgende Notation: $G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle g_1 | g_1^2 \rangle \cong \{1, g_1\}$ und $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle g_2 | g_2^2 \rangle \cong \{1, g_2\}$.

Die Menge der Ecken erhalten wir als $\text{vert}X \cong G/G_1 \sqcup G/G_2 \cong \{G_1, g_2G_1, g_1g_2G_1, \dots\} \sqcup \{G_2, g_1G_2, g_2g_1G_2, \dots\}$. Die Kantenmenge ist $\text{edge}X \cong G \sqcup \overline{G}$, wobei \overline{G} die formale Kopie für die negativ orientierten Kanten darstellt. Die Wirkung ist, wie in Abbildung 7 dargestellt, definiert. g_1 stabilisiert dabei die Ecke G_1 und g_2 die Ecke G_2 . Die Kante y wird nur von $G_y = A = \{1\}$ stabilisiert. Auf Grundlage der Wirkung erhalten wir, wie in Abbildung 8 dargestellt, das gewünschte Segment als Fundamentalbereich der Wirkung.

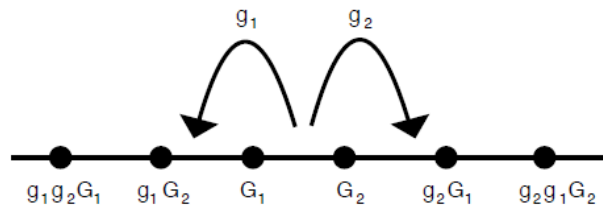


Abbildung 7: Definition der Wirkung des Amalgams $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ auf dem nach Theorem 3.12 gewählten Baum

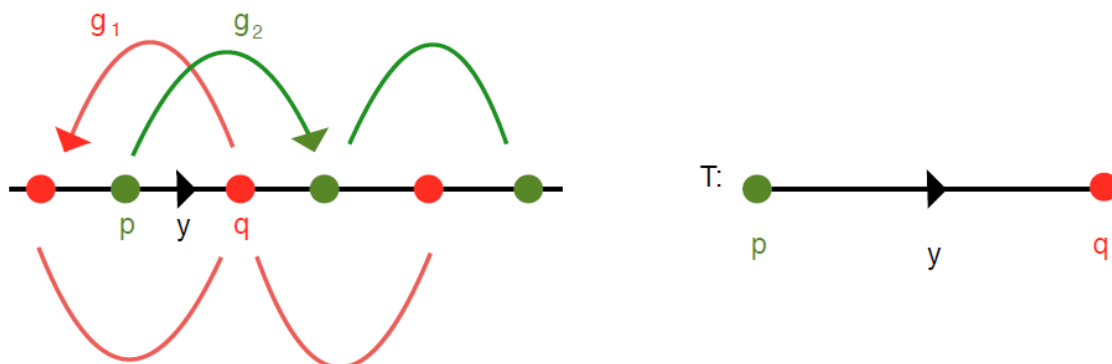


Abbildung 8: Der auf Grundlage der zuvor definierten Wirkung entstehende Quotientengraph

3.15 Beispiel Nun betrachten wir das Amalgam $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Erneut befinden wir uns im Fall $A = \{1\}$.

Als Eckenmenge des Graphen erhalten wir in analoger Notation zum vorherigen Beispiel:

$$\text{vert}X \cong G/G_1 \sqcup G/G_2 \cong \{G_1, g_2G_1, g_2^2G_1, g_2^3G_1, g_1g_2G_1, \dots\} \sqcup \{G_2, g_1G_2, g_1^2G_2, g_1^3G_2, \dots\}.$$

Die Kantenmenge von X enthält die Gruppe G und eine Kopie \overline{G} für die negativ orientierten Kanten.

Die Abbildung 9 zeigt die auf dem Graphen definierte Wirkung und die Grafik 10 den entstehenden Quotientengraphen.

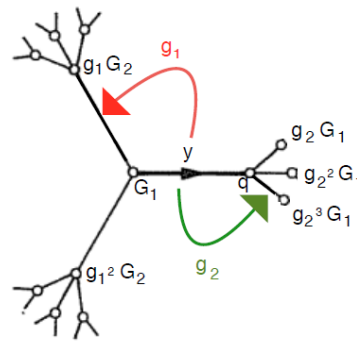


Abbildung 9: Definition der Wirkung des Amalgams $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ auf dem nach Theorem 3.12 gewählten Baum

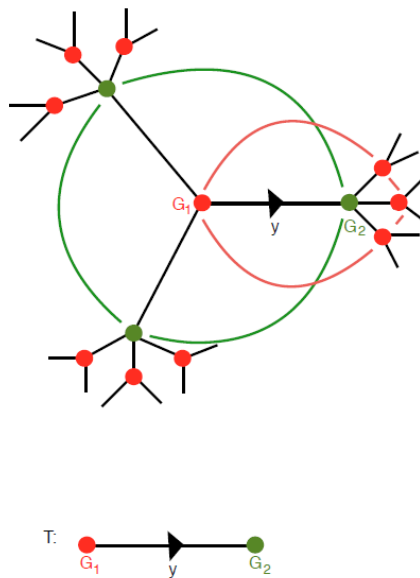


Abbildung 10: Der auf Grundlage der zuvor definierten Wirkung entstehende Quotientengraph

4 Untergruppen von Amalgamen aus zwei Faktoren

In diesem Kapitel betrachten wir stets ein Amalgam aus zwei Faktoren $G = G_1 *_A G_2$. Nach Theorem §3.12 lässt sich dem Amalgam G ein Baum zuordnen, auf dem G wirkt. Dabei ist der Baum X eindeutig bis auf Isomorphie.

Im Folgenden werden wir die Resultate aus dem ersten Kapitel nutzen, um mehr über die Untergruppen des Amalgams G zu erfahren.

4.1 Definition Eine Gruppe G wirkt genau dann *frei* auf dem Graph X , wenn G ohne Inversion wirkt und $\nexists g \neq 1$ mit $g(p) = p$ für ein $p \in \text{vert}X$.

4.2 Bemerkung In der Vorlesung von Professor Kramer hatten wir nicht verlangt, dass freie Wirkungen ohne Inversion wirken (Vgl. Kramer, 2015/2016, Definition §6.17, S.130_[1]).

4.3 Proposition *H sei eine Untergruppe von $G = G_1 *_A G_2$, sodass $(H - \{1\}) \cap \{kG_i k^{-1} \mid k \in G\} = \emptyset$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt.*

Dann folgt: H ist eine freie Gruppe.

Beweis. Nach dem Theorem §6.18 aus der Vorlesung Geometrische Gruppentheorie von Professor Kramer (Vgl. Kramer, 2015/2016, S.131_[1]) ist H genau dann eine freie Gruppe, wenn H frei auf einem Baum X wirkt.

Nach Theorem §3.12 wissen wir, dass das Amalgam $G = G_1 *_A G_2$ auf einem Baum X mit den Stabilisatoren $G_p = G_1$, $G_q = G_2$ und $G_y = A$ und dem Fundamentalbereich T in Form eines Segments wirkt. Man beachte, dass wie im Theorem $p = G_1$, $q = G_2$ und $y = A$ gilt.

Nach dem Theorem ist diese Wirkung ohne Inversion.

Außerdem erhalten wir $\text{vert}X \cong G/G_1 \sqcup G/G_2$. Für eine beliebige Ecke v gilt damit, dass $v = gG_1$ (oder $v = g'G_2$) für ein $g, g' \in G$ gilt. Für ein beliebiges Element $h \in G_v$ gilt $hv = hgG_1 = gG_1 = v$. Mittels Linksmultiplikation mit einem Element aus G_1 und g^{-1} erhalten wir, dass $h \in gG_1g^{-1}$ gilt.

Analog folgt der Fall, in dem $v = g'G_2$ gilt.

Es folgt, dass für den Stabilisator einer beliebigen Ecke v $G_v = gG_i g^{-1}$ für $i = 1, 2$ gilt.

Lassen wir nun die Untergruppe H auf dem Graphen X wirken, erhalten wir mit der Voraussetzung: $H_v = H \cap G_v = H \cap gG_i g^{-1} = \{1\}$ für ein $i = 1, 2$.

Das heißt, die Untergruppe $H \subseteq G$ wirkt nach Definition §4.1 frei auf dem Baum X und ist daher eine freie Gruppe. □

4.4 Definition Wir nennen eine Teilmenge H einer Gruppe G genau dann beschränkt, wenn die Länge reduzierter Kombinationen von Elementen aus H kleiner gleich n für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist.

Um über die Beschränktheit eines Graphen reden zu können, müssen wir prüfen, dass ein Graph ein metrischer Raum ist. Das benötigen wir für den Beweis von Theorem 4.6.

4.5 Satz *Sei X ein zusammenhängender Graph. Dann ist $(\text{vert}X, l: \text{vert}X \times \text{vert}X \rightarrow \mathbb{N}, (p, q) \mapsto \text{Länge eines minimalen Kantengeweges zwischen } p \text{ und } q)$ ein metrischer Raum.*

Beweis. Zu zeigen sind positive Definitheit (i) und Symmetrie (ii) der Abbildung l sowie, dass die Abbildung die Dreiecksungleichung (iii) erfüllt.

(i): $l \geq 0$ gilt offensichtlich. Weiter ist direkt klar, dass zwei Ecken durch einen reduzierten Kantenweg der Länge 0 nur verbunden werden können, wenn wir zwei gleiche Ecken wählen.

(ii): Die Symmetrie ist klar, da wir für jede Kante y einen Rückweg \bar{y} definiert haben.

(iii): Zu zeigen bleibt die Dreiecksungleichung. Seien $l(p,q) = m$, $l(q,r) = n$ gegeben. Dann gilt $l(p,r) \leq m + n$, da sich die Ecken p und r über den Punkt q mittels eines Kantenweges verbinden lassen. Somit liefert $m + n$ eine obere Schranke für die Länge des minimalen Kantenweges von p nach r . \square

4.6 Theorem Sei Γ eine beschränkte Untergruppe von $G = G_1 *_A G_2$. Dann gilt: $\Gamma \subseteq kG_i k^{-1}$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und ein $k \in G$.

Beweis. Wir lassen das Amalgam auf einem Baum X wirken, den wir nach Theorem §3.12 erhalten. Dieser Baum hat ein Segment T mit den Ecken $p = G_1$ und $q = G_2$ und den Kanten $y = (G_1, G_2)$ als Fundamentalbereich vom Quotientengraph $G \backslash X$. Dabei stabilisiert G_1 die Ecke p , $G_2 = G_q$ und $A = G_y$.

Wir zeigen: Ist Γ eine nach Definition §4.4 beschränkte Untergruppe in G , dann ist $\Gamma(\text{vert}T)$ ebenfalls beschränkt im Sinne des metrischen Raumes aus Bemerkung §4.5.

Wir nehmen uns ein beliebiges Element $g \in G_1 \cup G_2$. Dann haben T und gT eine gemeinsame Ecke, denn p (oder q) ist in T und gT enthalten. Betrachten wir $h \in H$, so wissen wir, dass $h = h_1 \dots h_n$ mit höchstens $n \in \mathbb{N}$ Erzeugern $h_i \in G_p \cup G_q$ erzeugt werden kann. Die Erzeuger h_i stabilisieren also entweder p oder q . Und wir erhalten, dass $l(p, h(q)) \leq n+1$, gemäß l aus Bemerkung §4.5.

Der Rest des Beweises, ausgeführt in Bemerkung §4.8, folgt nun aus Proposition §4.7 mit der Folgerung aus b) folgt c).

4.7 Proposition H sei eine Gruppe, die auf dem Baum X wirkt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- a) Für jede beschränkte Teilmenge $A \subseteq \text{vert}X$ gilt: HA ist beschränkt.
- b) Es existiert $p \in \text{vert}X$, sodass $H(p)$ beschränkt ist.
- c) Es existiert $q \in \text{vert}X$, sodass $H(q) = q$ gilt.

Beweis. Wir beweisen die Äquivalenz der Aussagen mittels Ringschluss.

"a) \Rightarrow b)": Endliche Mengen aus Gruppen sind insbesondere beschränkt. Wähle also $A = \{p\}$ für ein $p \in \text{vert}X$ als beschränkte Menge. Dann ist $H(p)$ nach der Aussage a) beschränkt.

"b) \Rightarrow c)": Y sei der von der Bahn $H(p)$ erzeugte Teilbaum von X . Dieser Teilbaum ist beschränkt, da $H(p)$ beschränkt ist, und invariant unter H nach der Definition der Erzeugung eines Baumes durch eine Bahn. Als Korollar aus einem vorherigen Kapitel wissen wir (vgl. Serre, 1980, §2.2 Proposition 10, Korollar, S.20_[2]):

Ein Baum von endlichem Durchmesser n hat eine Ecke (bzw. Kante), die invariant unter allen Automorphismen ist, falls n gerade (bzw. ungerade) ist.

Nach dem Korollar wissen wir, dass eine Ecke (bzw. eine Kante) in Y existiert, die invariant unter H ist, da die Wirkung durch $H \times Y \rightarrow Y$ einen Automorphismus $Y \rightarrow Y$ definiert.

Falls n gerade war, ist c) erfüllt.

Falls n ungerade war, existiert eine Kante die von H stabilisiert wird. Wir verlangen außerdem, dass H ohne Inversion wirkt. Damit folgt, da H invariant auf der Menge $\{y, \bar{y}\}$ wirkt, dass $H(y) = y$ und $H(\bar{y}) = \bar{y}$. Insbesondere wirkt H invariant auf den Ecken y_0 und y_1 und c) ist erfüllt.

”c) \Rightarrow a)”: Wir nehmen an, dass ein $q \in \text{vert} X$ existiert und wollen zeigen, dass für jede beschränkte Teilmenge $A \subseteq X$ gilt: HA ist ebenfalls beschränkt. Da A beschränkt ist, lässt sich der Abstand beliebiger Elemente in A durch eine Konstante N abschätzen. Ziel ist es nun die Menge HA in einem Ball mit einem festen Radius einzuschließen.

Dazu nehmen wir uns das Element q und ein Element $a \in A$. Weiter wählen wir ein beliebiges Element $a_0 \in A$ fest aus. Betrachten wir nun den Abstand $d(ha, q)$ des beliebigen Elements $ha \in HA$ zum Element q . Wir erhalten die folgende Abschätzung:

$$d(ha, q) \stackrel{\text{Invarianz}}{=} d(a, h^{-1}q) \stackrel{\text{Eig. } q}{=} d(a, q) \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(a, a_0) + d(a_0, q) \stackrel{\text{Eig. } A}{\leq} N + d(a_0, q).$$

Wobei man sich für die Invarianz vergewissern muss, dass sich die Anzahl der Kanten eines minimalen Kantenweges zwischen ha und q nicht von der eines minimalen Kantenweges zwischen a und $h^{-1}q$ unterscheidet.

Folglich ist das beliebige Element $ha \in B_{2N+d(a_0, q)}$ einem Ball von endlichem, konstanten Radius um q enthalten. Damit folgt, dass die Menge HA beschränkt ist.

Es folgt die Äquivalenz der Aussagen a), b) und c). □

4.8 Bemerkung Nutze b) folgt c) aus Proposition §4.7 mit dem Baum X und der beschränkten Untergruppe $\Gamma \subseteq G$.

Da T ein Fundamentalbereich ist gilt: $\Gamma(\text{vert} X) = \Gamma(\text{vert} T)$ und diese Menge ist nach dem bisherigen Beweis von Theorem §4.6 beschränkt, also ist b) erfüllt. Nun folgt, dass $\Gamma(v) = v$ gilt für ein $v \in \text{vert} X$. Damit ist, wie im Beweis von Proposition §4.3 gesehen, $\Gamma \subseteq G_v = kG_i k^{-1}$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und ein $k \in G$. Damit ist die Behauptung aus Theorem §4.6 bewiesen. □

4.9 Korollar Sei Γ eine endliche Untergruppe von $G = G_1 *_{A} G_2$.

Dann gilt: $\Gamma \subseteq kG_i k^{-1}$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und ein $k \in G$.

Beweis. Endliche Untergruppen sind insbesondere beschränkt und die Aussage folgt mit Theorem §4.6. □

5 Die Verallgemeinerung auf ein Amalgam aus mehr Faktoren

In §3 haben wir Gruppenwirkungen auf einem Baum betrachtet. Dabei konnten wir feststellen:

5.1 Bemerkung G hat genau dann die Form eines Amalgams aus zwei Faktoren, wenn G ohne Inversion auf einem Baum X wirkt und der Quotientengraph $G \setminus X$ die Form eines Segments hat.

In Kurzform: $G \cong G_1 *_A G_2 \Leftrightarrow G \curvearrowright X$ mit $G \setminus X \cong \text{Segment}$.

Beweis. " \Rightarrow ": Wenn $G \cong G_1 *_A G_2$ ist, dann existiert nach Theorem §3.12 ein Baum X auf dem G ohne Inversion mit einem Fundamentalbereich in Form eines Segments wirkt.

" \Leftarrow ": Wenn G ohne Inversion auf einem Baum X wirkt und der Fundamentalbereich ein Segment ist, dann erhalten wir nach Theorem §3.6, dass $G \cong G_p *_G G_q$ ein Amalgam aus zwei Faktoren ist. \square

Im folgenden Kapitel ist es unser Ziel, die Aussage zu verallgemeinern: G ist genau dann der Kolimes eines Baumes von Gruppen, wenn G ohne Inversion auf einem Baum X wirkt und der Quotientengraph $G \setminus X$ isomorph zum Baum T ist.

Dazu müssen wir zunächst die Begriffe Kolimes und Graph von Gruppen erklären.

5.2 Definition Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen und für i, j sei $F_{i,j} \subseteq \text{Hom}(G_i, G_j)$. Den Kolimes über dem System $((G_i)_{i \in I}, F_{i,j})$ definieren wir als Gruppe G , sodass für eine Abbildung $f \in F_{i,j}$ $f_i = f_j \circ f \forall i, j \in I$, wobei die $f_i \in \text{Hom}(G_i \rightarrow G)$ und $f_j \in \text{Hom}(G_j \rightarrow G)$.

5.3 Definition Ein *Graph von Gruppen* (\mathcal{G}, T) besteht aus einem Graphen T und einer Familie von Gruppen \mathcal{G} , die eine Gruppe G_p für jede Ecke $p \in \text{vert}T$ und eine Gruppe G_y für jede Kante $y \in \text{edge}T$ enthält. Zusätzlich verlangen wir die Existenz eines Monomorphismus $\varepsilon_{y_1}: G_y \rightarrow G_{y_1}$ für jede Kante. Außerdem soll $G_y = G_{\bar{y}}$ gelten.

Im Spezialfall, dass T ein *Baum* ist, bezeichnen wir (G, T) als einen *Baum von Gruppen*. Weiter bezeichnet $\mathcal{G}_T = \varinjlim (G, T)$ den *Kolimes des Baumes von Gruppen*.

Aufgrund der vorherigen Definition §5.2 ist der Kolimes über der Familie von Gruppen \mathcal{G} und der Indexmenge $I = \text{vert}T \cup \text{edge}T$, sowie der darüber definierten Menge an Homomorphismen $F_{y,y_1} := \{\varepsilon_{y_1}: G_y \rightarrow G_{y_1} \mid y \in \text{vert}T\}$ wohldefiniert.

5.4 Bemerkung Es lässt sich offensichtlich ein Graph von Gruppen definieren, indem wir die Wirkung einer Gruppe G auf dem Graphen X betrachten und die Familie von Gruppen in (\mathcal{G}, T) über die Stabilisatoren der Ecken und Kanten erklären.

5.5 Beispiel Sei T ein Segment bestehend aus den Ecken p und q und den Kanten y und \bar{y} . Die Familie von Gruppen \mathcal{G} bestehe aus G_p, G_q und $G_y = G_{\bar{y}}$. Zwischen den Gruppen fordern wir die Existenz folgender Monomorphismen $\varepsilon_p: G_y \rightarrow G_p$ und $\varepsilon_q: G_y \rightarrow G_q$.

Für die Gruppe \mathcal{G}_T gilt nach Definition $\mathcal{G}_T = \varinjlim (\mathcal{G}, T) = G_p *_G G_q / \langle\langle R \rangle\rangle = G_p *_G G_q$ mit $R = \{\iota_p(\varepsilon_p(h)) \iota_p(\varepsilon_p(h^{-1})) \mid h \in G_y\}$, wobei $\iota_v: G_v \hookrightarrow G_p *_G G_q$ die Einbettung von G_v ins freie Produkt für ein beliebiges $v \in \text{vert}T$ beschreibt. Dabei entspricht der Kolimes gerade dem amalgamierten

Produkt, da die ε_p und ε_q Monomorphismen sind und alle Kanten von der Untergruppe G_y stabilisiert werden.

Wählen wir für T ein Segment, so erhalten wir für \mathcal{G}_T genau das Amalgam $G_p *_{G_y} G_q$ und somit den Spezialfall aus Kapitel §3.

Für ein weiteres Beispiel benötigen wir die folgende Definition.

5.6 Definition Sei X ein Graph. Für $p \in \text{vert} X$ beschreibt der *Grad*, wie viele Kanten die Ecke als Ursprung haben. Eine *Ecke vom Grad 1* wird als *terminal vertex* oder *Außenecke* bezeichnet.

5.7 Beispiel Der Baum T entsteht aus einem Baum T' durch Hinzufügen einer Außenecke p wie in Abbildung 11 gezeigt.

Behauptung: Es gilt $\mathcal{G}_T = \mathcal{G}_{T'} *_{G_y} G_p$.

Beweis. In der Folge gelten die Bezeichnungen

$$R' = \bigcup_{y \in \text{edge} T'} \{ \iota'_{y_1}(h) \cdot \iota'_{y_1}(\varepsilon_{y_1}(h^{-1})) \mid h \in G_{y_1}, \varepsilon_{y_1} \in F_y \text{ für } y \in \text{edge} T' \}$$

$$\text{und } R = \bigcup_{y \in \text{edge} T} \{ \iota_{y_1}(h) \cdot \iota_{y_1}(\varepsilon_{y_1}(h^{-1})) \mid h \in G_{y_1}, \varepsilon_{y_1} \in F_y \text{ für } y \in \text{edge} T \}.$$

$\iota'_p: G_p \rightarrow *_{q \in \text{vert} T'} G_q$ beschreibt die Einbettung eines Stabilisators in das freie Produkt $*_{q \in \text{vert} T'} G_q$.

Analog beschreibt ι_p die Einbettung des Faktors G_p in das freie Produkt $*_{q \in \text{vert} T} G_q$.

$$\mathcal{G}_{T'} *_{G_y} G_p$$

$$= (*_{q \in \text{vert} T'} G_q / \langle\langle R' \rangle\rangle * G_p) / \langle\langle \{ \iota_{y_0}(\varepsilon_{y_0}(h)) \iota_{y_1}(\varepsilon_{y_1}(h^{-1})) \mid h \in G_y \} \rangle\rangle$$

$$= *_{q \in \text{vert} T' \cup \{p\}} G_q / \langle\langle R' \cup \{ \iota_{y_0}(\varepsilon_{y_0}(h)) \iota_{y_1}(\varepsilon_{y_1}(h^{-1})) \mid h \in G_y \} \rangle\rangle$$

$$= *_{q \in \text{vert} T} G_q / \langle\langle R \rangle\rangle$$

$$= \mathcal{G}_T. \quad \square$$

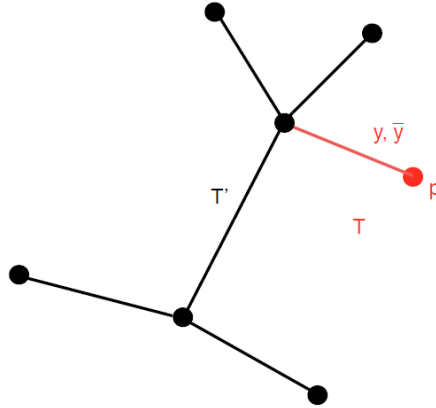


Abbildung 11: Beispiel eines Baumes T , der aus dem Baum T' durch Hinzufügen einer Außenecke entsteht.

Wir wollen nun zeigen, dass \mathcal{G}_T auf einem Graphen X mit "schönen" Eigenschaften wirkt. Der Graph X auf dem \mathcal{G}_T wirkt, ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig und insbesondere ein Baum.

5.8 Theorem Sei (G, T) ein Baum von Gruppen, zu dem ein Graph X existiert, der den Baum T enthält. Außerdem wirkt der Kolimes des Baums von Gruppen \mathcal{G}_T auf X , sodass:

- (i) T ein Fundamentalbereich von $\mathcal{G}_T \backslash X$ ist.
- (ii) $\forall p \in \text{vert } T: (\mathcal{G}_T)_p = G_p$ und $\forall y \in \text{edge } T: (\mathcal{G}_T)_y = G_y$.

Dann ist X ein Baum, der bis auf Isomorphie eindeutig ist.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch die Konstruktion eines Baumes (i), Angabe der Wirkung (ii), Berechnung des Quotientengraphen und Angabe des Fundamentalbereichs (iii). Weiter prüfen wir die Stabilisatoreigenschaften (iv) und, dass X ein Baum ist (v).

(i): In Analogie zur Konstruktion des Baumes in Theorem §3.12 lässt sich die Eckenmenge als $\text{vert } X = \bigcup_{p \in \text{vert } T} G_T / G_p$ definieren. Als Kantenmenge definieren wir $\text{edge } X = \bigcup_{y \in \text{edge } T} G_T / G_y$.

Die Start- und Endpunkte der Kanten sind über die Abbildung $\text{edge } X \rightarrow \text{vert } X \times \text{vert } X, gG_y \rightarrow (gG_{y_0}, gG_{y_1})$ definiert. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da $G_y \subseteq G_{y_0}$ und $G_y \subseteq G_{y_1}$ gilt und man sie über die Inklusionen $G_y \rightarrow G_{y_0}$ und $G_y \rightarrow G_{y_1}$ definiert.

Wir wollen eine alternative Darstellung der Ecken und Kanten des Graphen erhalten, dazu betrachten wir die Abbildung $\mathcal{G}_T / G_p \rightarrow \mathcal{G}_T(p), gG_p \mapsto g(p)$ für ein beliebiges $p \in \text{vert } T$.

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn: Falls $gG_p = hG_p$ gilt, dann folgt, dass $h^{-1}g \in G_p$ und damit folgt, dass $h(p) = h(h^{-1}g(p)) = g(p)$.

Die Abbildung ist per Definition surjektiv.

Weiter ist die Abbildung injektiv, denn: Angenommen sie wäre nicht injektiv, dann existieren $g, h \in G_T$ mit $g(p) = h(p)$, aber $gG_p \neq hG_p$. Aber $g(p) = h(p)$ ist äquivalent zu $h^{-1}g(p) = p$ und $h^{-1}g \in G_p$. Deswegen gilt, dass $hG_p = hh^{-1}gG_p = gG_p$.

Mit der Beobachtung, dass die Abbildung $\mathcal{G}_T / G_p \rightarrow \mathcal{G}_T(p)$ für ein beliebiges $p \in \text{vert } T$ bijektiv ist, lässt sich die Eckenmenge $\text{vert } X$ als $\bigcup_{p \in \text{vert } T} G_p(p)$ auffassen.

Für die Kantenmenge gilt eine analoge Beobachtung, sodass wir die Kantenmenge als $\bigcup_{y \in \text{edge } T} G_y(y)$ auffassen können.

(ii): Auf dem definierten Graphen wirkt die Gruppe \mathcal{G}_T durch Multiplikation: $\mathcal{G}_T \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}_T / G_p), x \mapsto (gG_p \mapsto xgG_p)$ für $p \in \text{vert } T$ und $\mathcal{G}_T \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{G}_T / G_y), x \mapsto (gG_y \mapsto xgG_y)$ für $y \in \text{edge } T$.

(iii): Auf Grundlage der Wirkung ergibt sich der Quotientengraph $\mathcal{G}_T \backslash X$ als ein Baum bestehend aus den Ecken $[G_p]$ für $p \in \text{vert } T$ und den Kanten $[G_y]$ für $y \in \text{edge } T$.

Da wir jeder Ecke und jeder Kante aus T genau eine Gruppe zuordnen und diese gerade die Ecken und Kanten des Quotientengraphen $\mathcal{G}_T \backslash X$ bilden, ist klar, dass $T \cong \mathcal{G}_T \backslash X$ gilt.

(iv): Weiter gilt für den Stabilisator einer beliebigen Ecke G_p in T : Für $x \in \mathcal{G}_T$ $xG_p = G_p \Leftrightarrow x \in G_p$. Analog folgt, dass der Stabilisator der Kante G_y gerade der Gruppe G_y entspricht.

(v): Es bleibt jedoch zu zeigen, dass X ein Baum ist.

Um das zu zeigen, fassen wir T als direkten Limes von endlichen Teilbäumen auf. \mathcal{G}_T wird gemäß der Definition 5.3 als Kolimes der Gruppen G_p und G_y für die $p \in \text{vert}T$ und $y \in \text{edge}T$ aufgefasst. X wiederum wird als direkter Limes von endlichen Teilgraphen betrachtet.

Man betrachtet im direkten Limes eine aufsteigende Folge von endlichen Teilgraphen, deren Vereinigung den gesamten Graphen ergibt. Für die aufsteigende Folge von Teilgraphen T_i gilt: $\varinjlim(\cup_{i \in I} G_i, \cup_{i \in I} T_i) = \cup_{i \in I} \varinjlim(G_i, T_i)$.

Achtung! Diese Gleichheit ist nicht trivial und müsste formal überprüft werden.

Der Kolimes ist also mit dem Übergang auf eine aufsteigende Folge endlicher Teilgraphen verträglich und wir können uns auf den Fall eines endlichen Graphen T beschränken.

Der Beweis folgt jetzt per Induktion über die Eckenanzahl des Graphen T , die wir mit n bezeichnen.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $X = T$.

Denn: Da T ein Baum mit einer Ecke ist, hat T keine Kanten. Es gilt also $T = \{p\}$. Wir wählen $\mathcal{G}_T = G_p$ und erhalten mit der alternativen Darstellung der Ecken $\text{vert}X = G_p(p) = \{p\}$ und $\text{edge}X = \emptyset$ als Graph X . Damit ist $X = T = \{p\}$ ein Baum.

Induktionsvoraussetzung: Für beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, sei X ein Baum.

Induktionsschritt: Sei $y \in \text{edge}T$ mit $p = y_1$ eine Außenecke von T . Nach einer vorherigen Proposition (Vgl. Serre, 1980, Proposition 9, S.19f_[2]) gilt, dass wir T aus einem Teilbaum $T' = T - \{p\}$ erhalten, indem wir eine Ecke p und Kanten y und \bar{y} hinzufügen. Nach Beispiel §5.7 wissen wir, dass für $\mathcal{G}_{T'} = \varinjlim(\mathcal{G}, T')$ gilt: $\mathcal{G}_T \cong \mathcal{G}_{T'} *_{G_y} G_p$.

Wie bereits für X definieren wir in Analogie den Graphen $X' = \mathcal{G}_{T'} T'$. Offensichtlich ist X' ein Teilgraph von X . X' ist nach Bemerkung §5.9 der assoziierte Graph zu (\mathcal{G}, T') . Und nach der Induktionsvoraussetzung ist X' ein Baum.

Außerdem sind die Transformationen gX' mit $g \in \mathcal{G}_T / \mathcal{G}_{T'}$ paarweise disjunkt.

Achtung! Auch das wäre zu überprüfen.

Wir stellen fest, dass gX' ein zu X' isomorpher Graph ist, da dieser durch Wirkung des Elementes g auf X' entsteht. Also ist gX' insbesondere ein Baum.

Als \tilde{X} definieren wir den Graphen, den wir aus X erhalten, wenn wir die gX' zu einem Punkt zusammenziehen. Wir kontrahieren in X also mehrere disjunkte Teilbäume gX' .

Dann wirkt die Gruppe G_y auf \tilde{X} mit dem Segment T/T' , das aus den Ecken $[T']$ und p und aus der Kante y besteht, als Fundamentalbereich.

Mit der definierten Wirkung erhalten wir, dass $G_{T'}$, G_p und G_y die Stabilisatoren der Bestandteile des Segments sind und zuvor hatten wir bereits gesehen, dass $\mathcal{G}_{T'} *_{G_y} G_p \rightarrow \mathcal{G}_T$ ein Isomorphismus ist, der von den Inklusionen induziert wird.

Nach Theorem §3.6 folgt damit, dass \tilde{X} ein Baum ist. Da \tilde{X} homotopieäquivalent zu X ist, folgt, dass X und \tilde{X} gleiche Fundamentalgruppen haben. Als Baum hat \tilde{X} die Fundamentalgruppe $\pi_1(\tilde{X}, p) \cong \{1\}$. Somit folgt nach einem Satz eines vorherigen Kapitels (vgl. Serre, 1980, §2.3, Kor.1, S.23_[2]), dass X ein Baum ist. \square

5.9 Bemerkung Der Graph X heißt der *assoziierte Graph bezüglich* (\mathcal{G}, T) und ist insbesondere ein Baum.

Nun interessieren wir uns für die umgekehrte Richtung: Wir wollen voraussetzen, dass G eine Gruppe ist, die auf einem Graphen X mit einem Fundamentalbereich in Form eines Baumes

T wirkt und wir definieren die Familie von Gruppen (\mathcal{G}, T) mittels der Stabilisatoren der Ecken und Kanten in T . Weiter ist Y der, nach der Bemerkung §5.9, assoziierte Graph von \mathcal{G}_T . Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir eine Aussage darüber, wann die Graphen X und Y und die Gruppen G und (\mathcal{G}, T) gleich aussehen.

5.10 Theorem Sei T der Fundamentalbereich der Wirkung einer Gruppe G auf einem Graphen X . Außerdem sei T ein Baum und wir definieren den Baum von Gruppen (\mathcal{G}, T) , wobei in \mathcal{G} die Stabilisatoren der Wirkung von G auf X als Gruppen verwendet werden. Weiter sei Y der assoziierte Graph von \mathcal{G}_T nach der Bemerkung §5.9.

Dann sind äquivalent:

- (i) X ist ein Baum.
- (ii) $Y \rightarrow X$ ist ein Isomorphismus.
- (iii) $\mathcal{G}_T \rightarrow G$ ist ein Isomorphismus.

Beweis.

”(iii) \Rightarrow (ii)”: Da T ein Fundamentalbereich der Wirkung von G auf X ist gilt: $X = GT$. Weiter ist T außerdem ein Fundamentalbereich der Wirkung von \mathcal{G}_T auf Y und es folgt: $\mathcal{G}_T T = Y$. Da G und \mathcal{G}_T isomorph sind erhalten wir insgesamt: $X \cong Y$.

”(ii) \Rightarrow (i)”: Da Y isomorph zu X ist und Y als assoziierter Graph zur Gruppe $\varinjlim(\mathcal{G}, T)$ ein Baum ist, ist auch X ein Baum.

”(ii) \Rightarrow (iii)”: Sei $p \in \text{vert} T$ und $(\mathcal{G}_T)_p$ ist der Stabilisator von p bezüglich \mathcal{G}_T . Außerdem ist G_p der Stabilisator von p bezüglich G . Aus der Konstruktion folgt, dass der Homomorphismus $\mathcal{G}_T \rightarrow G$ einen Isomorphismus $(\mathcal{G}_T)_p \rightarrow G_p$ induziert. Außerdem ist der Homomorphismus $Y \rightarrow X$ bijektiv, daher enthält der Kern H von $\mathcal{G}_T \rightarrow G$ den Stabilisator $(\mathcal{G}_T)_p$. Folglich gilt $H \cong \{1\}$ und da $\mathcal{G}_T \rightarrow G$ surjektiv ist, gilt, dass die Abbildung ein Isomorphismus ist.

”(i) \Rightarrow (ii)”: Es gilt $\mathcal{G}_T T = Y$ und $GT = X$. Weiter ist $Y \rightarrow X$ ein Epimorphismus und der Homomorphismus $\mathcal{G}_T \rightarrow G$ induziert einen Isomorphismus zwischen den Stabilisatoren $(\mathcal{G}_T)_t$ für $t \in (\text{vert} Y \cup \text{edge} Y)$ und G_t für $t \in (\text{vert} X \cup \text{edge} X)$.

Mit §5.11 folgt, dass der Homomorphismus $Y \rightarrow X$ als lokal injektive Abbildung bereits injektiv ist. \square

5.11 Lemma Y sei ein zusammenhängender Graph und X sei ein Baum. $f: Y \rightarrow X$ sei ein lokal injektiver Morphismus.

Dann folgt, dass f injektiv ist.

Beweis. Wir zeigen, dass für einen reduzierten Kantenweg c in Y der Weg foc in X ebenfalls reduziert ist. Da Y zusammenhängend ist, folgt daraus die Behauptung.

Da X ein Baum ist, müssen wir nur zeigen, dass foc ohne backtracking ist, denn Kantenwege zwischen zwei Ecken im Baum sind bis auf backtracking eindeutig. Es folgt, dass der Weg foc reduziert ist, da c durch f lokal injektiv abgebildet wird. Nach Geometrische Gruppentheorie I, Bemerkung §7.1 (Vgl. Kramer, 2015/2016, S.133_[1]) sind lokal injektiv abgebildete Kantenwege bereits reduziert. \square

In Analogie zur Aussage aus Kapitel §3 (siehe Bemerkung §5.1) liefert uns das Kapitel §5 die zusammenfassende Aussage:

5.12 Bemerkung (\mathcal{G}, T) ist ein Baum von Gruppen:

$$G \cong \varinjlim (\mathcal{G}, T) \Leftrightarrow G \curvearrowright X, G \backslash X \cong T$$

Beweis.

” \Rightarrow ”: Nach Theorem §5.8 wirkt \mathcal{G}_T auf dem Graphen X und der Quotientengraph $G \backslash X$ ist isomorph zum Baum T .

” \Leftarrow ”: Wenn G auf dem Graphen X wirkt und der Fundamentalbereich der Wirkung ein Baum T ist, dann können wir einen Baum von Gruppen über der Familie der Stabilisatoren der Ecken und Kanten von T definieren. Nach Theorem §5.10 erhalten wir bereits, dass $G \cong \mathcal{G}_T$ ist.

Literatur

- [1] L.Kramer, Vorlesungsnotizen "Geometrische Gruppentheorie", Wintersemester 2015/2016,
http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ag_kramer/index.php?name=VorlesungGruppentheorie15&menu=teach&lang=de, 24.04.2016.
- [2] J.P.Serre, Trees, Springer Verlag, 1980.