Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

§6 Amalgame und Fixpunkte

aus dem Buch „Trees“ von Jean-Pierre Serre

Seminar Gruppentheorie und Geometrie:
Gruppen, Expandergraphen und Bäume
Sommersemester 2016

Seminarvortrag von:
Julia Brimmers

Dozenten:
Prof. Dr. Linus Kramer
Dr. Olga Varghese

Münster, 13.05.2016

Inhaltsverzeichnis

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass manche Gruppen keine Amalgame sind (z.B. $SL_3(\mathbb{Z})$) und daher Fixpunkte vorhanden sind, wenn diese Gruppen auf Bäume wirken.

0.1 Konvention

- Jede Gruppe G, die auf einen Baum X wirkt, wirkt ohne Inversion, d.h. es existiert keine Kante e in X mit $g(e) = \bar{e}$ für ein $g \in G$.
- Für zwei Ecken P und Q eines Baumes sei P-Q der eindeutige reduzierte Kantenweg von P nach Q, die sogenannte *Geodäte*.

1 Die Fixpunkteigenschaft für Gruppen, die auf Bäumen wirken

1.1 Bemerkung

Es sei s ein Automorphismus (ohne Inversion) eines Baumes X. Für zwei Ecken P, Q $\in$ V(X) gilt dann s(P-Q) = sP-SQ.

Beweis: Das ist klar, da s bijektiv ist (d.h. für alle Ecken $A \neq B$ ist auch $sA \neq sB$) und für jede Kante $e \in E(X)$ mit $e_0 = A \in V(X)$ und $e_1 = B \in V(X)$ gilt, dass se ein Kante von sA nach sB ist. □

1.2 Lemma

Sei G eine Gruppe, die (ohne Inversion) auf einen Baum X wirkt. Dann ist die Menge $X^G = (V, E)$ $(V = \{P \in V(X) \mid gP = P \text{ für alle } g \in G\}$, $E = \{e \in E(X) \mid ge = e \text{ für alle } g \in G\})$ aller Fixpunkte von X bezüglich G ein Baum, wenn $X^G \neq \emptyset$.

Beweis: Für $X^G = \{P\}$ ist die Behauptung richtig. Also können wir wegen $X^G \neq \emptyset$ annehmen, dass zwei Ecken P, Q $\in X^G$ existieren. Für ein $g \in G$ gilt nach der Bemerkung 1.1 g(P-Q) = gP-gQ = P-Q. Also liegt wegen der Eindeutigkeit der Geodäte P-Q in X^G und X^G ist zusammenhängend. Da X^G ein zusammenhängender Teilgraph von dem Baum X ist, ist X^G auch ein Baum. □

1.3 Definition

Eine Gruppe G hat die Eigenschaft **(FA)**, falls $X^G \neq \emptyset$ für alle Bäume X, auf denen G wirkt.

1.4 Theorem

Sei G eine abzählbare Gruppe. G hat die Eigenschaft (FA) genau dann, wenn Folgendes gilt:

(i) G ist kein Amalgam.

(ii) G hat keinen Quotienten isomorph zu $\mathbb{Z}$.

(iii) G ist endlich erzeugt.

Beweis: *(FA) ⇒ (i):* Angenommen, G ist ein Amalgam $G_1 *_A G_2$ mit $G_1 \neq A \neq G_2$. Dann gibt es nach Kapitel I. 4.1, Theorem 7 (Trees, J.P. Serre) einen Baum X, auf dem G wirkt, der eine Strecke PQ = $\overset{P \quad y \quad Q}{\circ\!\!\longrightarrow\!\!\circ}$ als Fundamentalbereich hat und für deren Stabilisatoren $G_P = \{g \in G \mid gP = P\} = G_1$, $G_Q = \{g \in G \mid gQ = Q\} = G_2$ und $G_y = \{g \in G \mid gy = y\} = A = G_1 \cap G_2$ gilt, wobei y die Kante von P nach Q ist. Also ist die Menge der Bahnen G\X isomorph zu der Strecke PQ. Sei weiter $S \in X^G$ eine Ecke. Dann gilt gS = S für alle $g \in G$. Ohne Einschränkung ist $S \in G(P)$, also S = hP für ein $h \in G$. Insgesamt folgt, dass $S = h^{-1}S = P$ ist, und daher $G_1 = G_P = G$ und $A = G_1 \cap G_2 = G \cap G_2 = G_2$ gelten muss, was ein Widerspruch zu $G_1 \neq A \neq G_2$ ist. Also gilt entweder $X^G = \emptyset$ (Widerspruch zur Voraussetzung) oder G ist kein Amalgam, was zu zeigen war.
(FA) ⇒ (ii): Angenommen, G hat einen Quotienten isomorph zu $\mathbb{Z}$. Dann wirkt G auf $\mathbb{Z}$ (einem Baum) durch Translation und $\mathbb{Z}^G$ wäre gleich $\emptyset$, was im Widerspruch zu (FA) steht.
(FA) ⇒ (iii): Da G abzählbar ist, ist G die Vereinigung einer streng wachsenden Kette $G_0 \subset G_1 \subset \ldots$ von endlich erzeugten Untergruppen. Es sei X der Graph, dessen Eckenmenge die disjunkte Vereinigung der Mengen G/G_n ist. Zwei Ecken seien durch eine Kante verbunden genau dann, wenn sie Elemente zwei aufeinanderfolgenden Mengen G/G_n und G/G_{n+1} sind und sich unter der kanonischen Abbildung $G/G_n \to G/G_{n+1}$ entsprechen. Dies ist ein Baum, da für alle Ecken P und Q von X, $P = gG_n \in G/G_n$ und $Q = fG_m \in G/G_m$ für g, f $\in$ G und n, m $\in \mathbb{N}$, ein minimales $k \in \mathbb{N}$ $(k \geq n, m)$ existiert mit $gG_k = fG_k$. Das heißt, dass sich P und Q unter den kanonischen Abbildungen in G/G_k

(das erste Mal) entsprechen und somit ein Kantenweg zwischen diesen Punkten existiert. Dieser ist eindeutig (und reduziert), da es nach Definition genau eine Kante von G/G_l zu G/G_{l+1} mit festem Startpunkt in G/G_l gibt. Weiter wirkt G durch Linksmultiplikation auf X. Wenn G die Eigenschaft (FA) hat, existiert eine Ecke P in X, die unter G fest bleibt. Wenn also $P \in G/G_n$ gilt, so ist $P = gG_n$ für ein $g \in G$ und $gG_n = P = hg^{-1}P = hG_n$ für alle $h \in G$, das heißt $G/G_n \cong \{1\}$, also $G_n = G$ und G ist endlich erzeugt.

(i)-(iii) $\Rightarrow$ *(FA):* G habe die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) und wirke auf einem Baum X. Sei $T = G\backslash X$. Dann ist die Fundamentalgruppe $\Pi_1(T)$ des Graphen nach Korollar 1 zu Theorem 13 (Kapitel I. 5.4, Trees, J.P. Serre) isomorph zu einem Quotienten von G. Da $\Pi_1(T)$ (nach der Vorlesung Geometrische Gruppentheorie 1) eine freie Gruppe ist, ist dies wegen (ii) nur möglich für $\Pi_1(T)=\{1\}$, da man sonst immer einen Quotienten findet, der isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Also ist T ein Baum und nach Proposition 14 (Kapitel I. 3.1, Trees, J.P. Serre) finden wir einen Teilbaum $X' \subseteq X$, sodass φ: $X \to G\backslash X$, $v \mapsto G(v)$, $e \mapsto G(e)$ für $v \in V(X)$ und $e \in E(X)$ eingeschränkt auf X' ein Isomorphismus ist ($X' \cong T$). Nach Theorem 10, Kapitel I. 4.5 (Trees, J.P Serre) kann G somit mit der Gruppe $G_T = \varinjlim \{G, T\}$ identifiziert werden, wobei G_T der Limes des Baumes von Gruppen ist, der durch die Gruppen G_P und G_y (den Stabilisatoren der Ecken P und der Kanten y aus T) festgelegt ist. Es folgt, dass G die Vereinigung der Gruppen $G_{T'} = \varinjlim \{G, T'\}$ ist, wobei T' die Menge der endlichen Teilbäume von T durchläuft. Da G endlich erzeugt ist, gibt es ein T' mit $G = G_{T'}$. Wir wählen T' minimal mit dieser Eigenschaft. Falls T' sich zu einer einzigen Ecke P reduziert, haben wir $G = G_P$ und G hat einen Fixpunkt. Ansonsten hat T' eine Ecke P, zu der nur eine Kante y führt (da T' ein endlicher Baum ist) und T"=T'-P ist ein Baum (vgl. Kapitel I. 2.2, Proposition 9, Trees, J.P. Serre). Dann haben wir $G = G_{T'} = G_{T''} *_A G_P$ mit $A = G_y$. Da T' minimal gewählt haben, gilt $G \neq G_{T''}$ und $G \neq G_P$. Dann wäre G ein Amalgam, was ein Widerspruch zu (i) wäre. □

1.5 Bemerkung
Wenn G nicht abzählbar ist, bleibt das Theorem trotzdem gültig, wobei die Bedingung (iii) ersetzt wird durch

(iii') G ist keine Vereinigung von einer streng wachsenden Folge von Untergruppen

Beispiele von (überabzählbaren) Gruppen, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllen, wurden von J. Tits und S. Koppelberg konstruiert.

2 Beispiele

(i) Eine endlich erzeugte Torsionsgruppe hat die Eigenschaft (FA).

<u>*Beweis*</u>: Es genügt wegen Theorem 1.4 zu zeigen, dass so eine Gruppe kein Amalgam $G_1 *_A G_2$ ($G_1 \neq A \neq G_2$, $A = G_1 \cap G_2$) sein kann. Das ist klar, denn wenn wir $s_1 \in G_1$-A und $s_2 \in G_2$-A nehmen, ist das Element s_1s_2 zyklisch reduziert und hat somit unendliche Ordnung. Aber in einer Torsionsgruppe haben alle Elemente endliche Ordnung. (Dies ist auch der Grund, warum es keinen Quotienten der Torsionsgruppe geben kann, der isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.) □

(ii) Wenn eine Gruppe G die Eigenschaft (FA) hat, so auch jeder Quotient von G.

<u>*Beweis*</u>: Sei G/H ein Quotient von G und X ein Baum, auf dem G/H wirkt. Definiere eine Wirkung von G auf X durch $g(x) = gH(x)$ für $g \in G$ und $x \in X$ (einfaches Nachrechnen zeigt, dass dies eine Wirkung ist). Dann gilt offensichtlich $X^{G/H} = X^G \neq \emptyset$, da G die Eigenschaft (FA) hat. □

(iii) H sei eine normale Untergruppe der Gruppe G. Wenn H und G/H die Eigenschaft (FA) haben, so auch G.

<u>*Beweis*</u>: Sei X ein Baum, auf dem G wirkt. Dann gilt $X^H \neq \emptyset$ und die Gruppe G/H wirkt auf dem Baum X^H ($gH(x) = g(x)$ für $g \in G$ und $x \in X^H$; das ist wohldefiniert, da für $gH = g'H$ ein $h \in H$ existiert mit $g = g'h$ und daher $gH(x) = g(x) = g'h(x) = g'(x) = g'H(x)$) und hat nach Voraussetzung einen Fixpunkt. Dieser ist dann auch ein Fixpunkt von der Wirkung von G auf X. (Das gleiche gilt auch für Rechtswirkungen, da H normal ist.) □

(iv) H sei eine Untergruppe von endlichem Index in G. Wenn G auf einem Baum wirkt und $X^H \neq \emptyset$, so gilt auch $X^G \neq \emptyset$. (Insbesondere: Falls H die Eigenschaft (FA) hat, so auch G.)

Beweis: Sei N eine normale Untergruppe von endlichem Index in G, die in H enthalten ist, und X ein Baum auf dem G wirkt. Dann gilt $\emptyset \neq X^H \subseteq X^N$ und G/N wirkt auf dem Baum X^N. Da G/N endlich ist, gibt es nach Kapitel I. 4.3, Proposition 19 (J.P. Serre) einen Fixpunkt und es gilt somit nach (iii) $X^G \neq \emptyset$. □

(v) Achtung: Es gilt jedoch nicht, dass, wenn G die Eigenschaft (FA) hat, so auch ihre Untergruppen vom endlichen Index.
[Ein Gegenbeispiel ist die Schwarz Gruppe, die durch die zwei Erzeuger a und b und die Relationen $a^A = b^B = (ab)^C = 1$ (A, B, C sind ganze Zahlen ≥ 2) definiert wird. Diese Gruppe hat die Eigenschaft (FA), aber auch eine Untergruppe von endlichem Index (wenn $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \leq 1$), die Quotienten isomorph zu $\mathbb{Z}$ hat, also nicht die Eigenschaft (FA) besitzt.]

3 Fixpunkte eines Automorphismus eines Baumes

3.1 Lemma
T_1 und T_2 seien zwei disjunkte Teilbäume eines Baumes X und n sei der Abstand von T_1 und T_2 (d.h. das Minimum von l(P,Q) für $P \in V(T_1)$ und $Q \in V(T_2)$). Dann gilt:

(i) Es gibt genau ein Paar $(P_1, P_2) \in V(T_1) \times V(T_2)$ mit $l(P_1, P_2) = n$.

(ii) $l(Q_1, Q_2) = l(Q_1, P_1) + n + l(P_2, Q_2)$ für $Q_1 \in V(T_1)$ und $Q_2 \in V(T_2)$

(iii) Jeder Teilbaum von X, der sowohl T_1 als auch T_2 schneidet, enthält P_1-P_2.

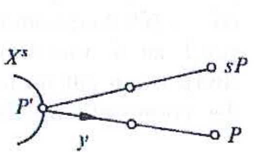
(P_1-P_2 ist dann die geodätische Verbindung von T_1 zu T_2.)

Beweis: Seien $P_1 \in V(T_1)$ und $P_2 \in V(T_2)$ mit $l(P_1, P_2) = n$. Die Ecken von P_1-P_2 (mit Ausnahme der Endpunkte) gehören weder zu T_1 noch zu T_2, da sonst der Abstand von T_1 zu T_2 kleiner als n wäre. Es folgt, dass der Weg von $Q_1 \in V(T_1)$ nach $Q_2 \in V(T_2)$, der durch Verbinden von Q_1-P_1, P_1-P_2 und P_2-Q_2 entsteht, ohne backtracking ist. Damit gilt (ii): $l(Q_1, Q_2) = l(Q_1, P_1) + n + l(P_2, Q_2)$ und (i) und (iii) folgen sofort. Denn angenommen $n = l(P_1', P_2')$ für $P_1' \in V(T_1)$ und $P_2' \in V(T_2)$, so gilt $n = l(P_1', P_2') = l(P_1', P_1) + n + l(P_2, P_2') \Rightarrow l(P_1', P_1) = 0 = l(P_2, P_2')$, also $P_1' = P_1$ und $P_2' = P_2$. Sei weiter $T \subseteq X$ ein Teilbaum mit $T \cap T_1 \neq \emptyset \neq T \cap T_2$ und $Q_1 \in T \cap T_1$, $Q_2 \in T \cap T_2$. Dann entsteht Q_1-Q_2 durch Verbinden von Q_1-P_1, P_1-P_2 und P_2-Q_2, das heißt, dass P_1-P_2 schon in T liegen muss, da T ein Baum ist. □

Automorphismen mit Fixpunkten

Es sei s ein Automorphismus (ohne Inversion) eines Baumes X. Wir sagen s hat einen Fixpunkt, wenn $\emptyset \neq X^s = \{x \in X | sx = x\} \subseteq X$ (und X^s ist dann ein Baum).

3.2 Proposition
Angenommen, s hat einen Fixpunkt. Sei $P \in V(X)$, n der Abstand zwischen P und X^s und P-P' die geodätische Verbindung von P zu X^s. Dann erhält man P-sP durch Verbinden von P-P' und P'-sP = s(P'-P).



Beweis: Für n = 0 ist dies klar, da dann P = P' = sP. Für $n \geq 1$ bezeichnen wir mit y die Kante von P-P' mit Ursprung in P'. Es gilt $sy \neq y$, da sonst auch der Endpunkt in X^s liegen würde und der Abstand von P zu X^s kleiner als n wäre. Damit folgt, dass der Weg, der durch Verbinden von P-P' und s(P'-P) = P'-sP entsteht, ohne backtracking ist und somit gleich P-sP. □

3.3 Korollar

(i) l(P, sP) = 2n

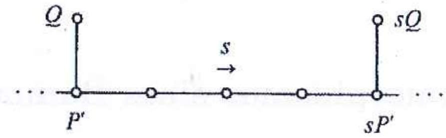
(ii) Der Mittelpunkt von P-sP ist P', d.h. l(P, P') = l(P', sP), und ein Fixpunkt von s.

Automorphismen ohne Fixpunkten

3.4 Definition
Eine doppelte unendliche Kette  wird *gerader Weg* genannt.

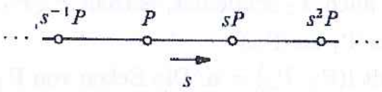
3.5 Proposition (Tits)
Angenommen, der Automorphismus s hat keinen Fixpunkt. Setze m = $\inf\{l(P,sP) \mid p \in V(X)\}$ und T = $\{P \in V(X) \mid l(P,sP) = m\}$. Dann gilt:

(i) T ist die Eckenmenge von einem geraden Weg von X.
(ii) s induziert eine Translation auf T der Größe m.
(iii) Jeder Teilbaum von X, der invariant unter s und s^{-1} ist, enthält T.
(iv) Falls eine Ecke Q von X den Abstand d zu T hat, so ist l(Q, sQ) = m + 2d.



(m = 4, d = 1)

<u>*Beweis*</u>: Sei P $\in$ T und seien P = P_0, P_1, ..., P_m = sP die Ecken von c = P-sP. Durch Verbinden von c und sc erhalten wir einen Weg, der P und s^2P verbindet. Dieser ist ohne backtracking, da sonst P_{m-1} = sP_1 wäre. Dies ist jedoch für m = 1 nicht möglich, da s ohne Inversion wirkt, und für m $\geq$ 2 wäre dann l(P_1, sP_1) = m - 2 < m, was ebenfalls ein Widerspruch zu den Voraussetzungen ist. Mit Induktion folgt, dass die Wege s^nc (n$\in \mathbb{Z}$) einen geraden Weg

(T_p) 

bilden, der invariant unter s ist, und, dass s eine Translation der Länge m auf T_p ist. Wenn Q eine Ecke von X mit Abstand d von T_p und P' die Ecke von T_p mit l(Q, P') = d ist, so ist der Weg, der aus Q-P', P'-sP' und sP'-sQ entsteht ohne backtracking. Wir haben also l(Q, sQ) = d + m + d = m + 2d. Insbesondere gilt l(Q, sQ) = m nur, wenn d = 0, also ist T = T_p. Weiter sei X' ein Teilbaum von X, der invariant unter s und s^{-1} ist. Für jede Ecke Q in X' ist somit auch Q-sQ in X'. Da Q-sQ (mit der Notation von oben) durch Verbinden von Q-P', P'-sP' und sP'-sQ entsteht, liegt P'-sP' in X' und daher auch ganz T_p (die Vereinigung der s^n(P'-sP'), n$\in \mathbb{Z}$). □

3.6 Proposition
Es sei s ein Automorphismus von einem Baum X. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(i) s hat keinen Fixpunkt
(ii) Es gibt eine eindeutige Kante y in X, sodass $l(y_0, sy_0) = l(y_1, sy_1)$.
(iii) Es gibt einen geraden Weg T in X, der unter s invariant ist und auf dem s eine Translation der Größe m > 0 induziert.

Ein Automorphismus mit diesen Eigenschaften wird auch *hyperbolisch* genannt.

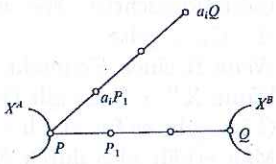
<u>*Beweis*</u>: *(i) → (iii)*: Folgt direkt aus Proposition 3.5 (Tits).
(iii) → (ii): Folgt ebenfalls aus Proposition 3.5 (Tits).
(ii) → (i): Angenommen, es gäbe einen Fixpunkt und y sei die Kante von P nach Q. n sei der Abstand von P zu X^s und ohne Einschränkung ist dann der Abstand von Q zu X^s n-1 (da X und X^s Bäume sind). Dann gilt nach Korollar 3.3 l(P, sP) = 2n und l(Q, sQ) = 2n - 2. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $l(y_0, sy_0) = l(y_1, sy_1)$, also l(P, sP) = l(Q, sQ). □

4 Gruppen mit Fixpunkten

4.1 Proposition

Sei G eine Gruppe, die von den Elementen a_i (i $\in$ I) und b_j (j $\in$ J) erzeugt wird, und seien $A = \langle \{ a_i | i \in I \} \rangle$ und $B = \langle \{ b_j | j \in J \} \rangle$ Untergruppen in G. Weiter wirke G auf einem Baum X, sodass $X^A \neq \emptyset$, $X^B \neq \emptyset$ und für jedes Paar (i, j) $\in I \times J$ der Automorphismus $a_i b_j$ einen Fixpunkt hat. Dann hat G einen Fixpunkt, d.h. $X^G \neq \emptyset$.

<u>*Beweis*</u>: Es gilt $X^G = X^A \cap X^B$. Angenommen, die Bäume X^A und X^B sind disjunkt und P-Q sei die geodätische Verbindung dieser Bäume mit $P \in V(X^A)$ und $Q \in V(X^B)$ (vgl. Lemma 3.1). Weiter sei P_1 die Ecke von P-Q mit Abstand 1 von P, so gilt $P_1 \notin X^A$ und es gibt ein i $\in$ I, sodass $a_i P_1 \neq P_1$. Der Weg Q-a_iQ, der durch Verbinden von Q-P und P-a_iQ = a_i(P-Q) entsteht, ist somit ohne backtracking. Für alle j $\in$ J gilt $a_i Q = a_i b_j Q$ und $a_i b_j$ hat einen Fixpunkt. Nach Korollar 3.3 ist P der Mittelpunkt von Q-a_iQ = Q-$a_i b_j$Q und ein Fixpunkt von $a_i b_j$, d.h. $a_i b_j P = P \Leftrightarrow b_j P = a_i^{-1} P$ (= P). Also ist P ein Fixpunkt für alle b_j (j $\in$ J), was ein Widerspruch zu $X^A \cap X^B = \emptyset$. □



4.2 Korollar

Angenommen, G wird durch endlich viele Elemente s_1, ..., s_n erzeugt und die s_j und $s_i s_j$ haben für alle i, j = 1, ..., n Fixpunkte. Dann hat G einen Fixpunkt.

<u>*Beweis*</u>: per Induktion nach n:
Induktionsanfang: n = 1: klar, n = 2: Wende Proposition 4.1 an mit $a_1 = s_1$ und $b_1 = s_2$.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes n $\in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt n $\mapsto$ n+1: Setze $a_1 = s_1$, ..., $a_n = s_n$ und $b_1 = s_{n+1}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen gemeinsamen Fixpunkt von s_1, ..., s_n, d.h. mit den Bezeichnungen aus Proposition 4.1 gilt $X^A \neq \emptyset$ und die Voraussetzungen sind erfüllt. Also hat G einen Fixpunkt. □

Nilpotente Gruppen

4.3 Definition

Das *Zentrum* einer Gruppe G ist Cen(G) = { a $\in$ G | ab = ba für alle b $\in$ G } $\lhd$ G.
Definiere die *obere Zentralreihe* $\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \ldots$ von G rekursiv durch $Z_0 = \{1\}$ und $Z_{i+1}(G)$ als das Urbild des Zentrums $\mathrm{Cen}(G/Z_i(G))$ unter der kanonischen Projektion $G \to G/Z_i(G)$ (d.h. $Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = \mathrm{Cen}(G/Z_i(G))$).
Definiere die *untere Zentralreihe* $G = L_0(G) \geq L_1(G) \geq \ldots$ von G rekursiv durch $L_0 = G$ und $L_{i+1}(G) = [G, L_i] = \langle \{[a, b] \mid a \in G, b \in L_i\} \rangle$, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.
Die Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn es ein k $\in \mathbb{N}$ gibt, sodass $Z_k(G) = G \Leftrightarrow L_k = \{1\}$.
Eine *Normalreihe* in einer Gruppe G ist eine Folge von Untergruppen $\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G$ mit $G_{i+1} \lhd G_i$. Die Quotienten G_{i+1}/G_i nennt man *Faktoren.*

4.4 Proposition

Sei G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, die auf einem Baum X wirkt. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) G hat einen Fixpunkt.

(ii) Es gibt einen geraden Weg T in X, der unter G invariant ist, und auf dem G mittels eines nicht trivialen Homomorphismus γ: $G \to \mathbb{Z}$ durch Translation wirkt, das heißt, dass g $\in$ G den geraden Weg T um $\gamma(g)$ verschiebt.

<u>*Beweis*</u>: Wir nehmen zuerst an, dass Fall (ii) zutrifft. Wähle dann ein Element s in G, sodass die Wirkung auf T eine nicht triviale Translation ist. Nach Proposition 3.6 hat s keinen Fixpunkt. Also schließen sich (i) und (ii) gegenseitig aus. Außerdem zeigt Proposition 3.6, dass T eindeutig ist.
Da G endlich erzeugt und nilpotent ist, finden wir eine Normalreihe $\{1\} = G_0 \subset \ldots \subset G_n = G$, sodass die Faktoren G_{i+1} / G_i zyklisch sind.
[Denn: Wir haben eine Normalreihe $G = L_0(G) \geq \ldots \geq L_r(G) = \{1\}$ für ein r $\in \mathbb{N}$, $L_i \lhd G$ und $A_i := L_i/L_{i+1}$ (i = 0, ..., r-1) ist endlich erzeugt und abelsch. Weiter gilt für a $\in L_i$, dass $\langle a \rangle L_{i+1} \lhd G$, da

$L_{i+1} \lhd G$ und für $g \in G$, $k \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt: $[g, a^k] \equiv 1 \pmod{L_{i+1}(G)} \Leftrightarrow g a^k g^{-1} \equiv a^k \pmod{L_{i+1}(G)} \Leftrightarrow g(a^k L_{i+1}(G))g^{-1} = a^k L_{i+1}(G)$. Schreibe nun für ein festes i $A_i = \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}/m_l$ (m zyklische Summanden). Wähle $a_j \in L_i(G)$ so, dass $a_j L_{i+1}(G)$ den j-ten zyklischen Symmanden erzeugt. Setze $N_j = \langle a \rangle L_{i+1}(G)$, das heißt, dass $N_j / L_{i+1}(G)$ der j-te zyklische Summand ist und $N_j \lhd G$. Damit verfeinern wir die Normalreihe von G zu: $G \geq ... \geq L_i(G) = N_1 \cdot ... \cdot N_m \geq N_1 \cdot ... \cdot N_{m-1} \geq ... \geq N_1 \geq L_{i+1}(G)$. Die neu entstandenen Faktoren sind zyklisch und alle beteiligten Gruppen sind normal in G. Wenn man dies für jedes i = 0, ..., r-1 macht, erhält man die gewünschte Normalreihe mit zyklischen Faktoren.]

Wir beweisen die Proposition nun mit Induktion nach n:
Induktionsanfang n = 0 ist trivial.
Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass $n \geq 1$ und die Induktionsvoraussetzung für die Gruppe $H = G_{n-1}$ gelte.

Wenn H einen Fixpunkt hat, betrachte die Wirkung der zyklischen Gruppe G/H ($= \langle aH \rangle$) auf dem Baum $X^H \neq \emptyset$. Es gilt $G(X^H) \subseteq X^H$, denn sei $x \in X^H$ und $g \in G$ beliebig. Da H ein Normalteiler in G ist, gibt es für alle $h \in H$ ein $h' \in H$ mit $hg = gh'$. Folglich gilt: $h(gx) = g(h'x) = gx$, also $gx \in X^H$. Man erhält also durch Einschränken der Wirkung $G \times X \to X$ einen wohldefinierten Homomorphismus $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(X^H)$ mit $H \subseteq \ker(\varphi)$. Der Homomorphiesatz liefert somit einen Homomorphismus $\varphi': G/H \to \mathrm{Aut}(X^H)$, $\varphi'(gH) = \varphi(g)$. Angenommen, aH hat einen Fixpunkt $P \in V(X^H)$, so ist P ein Fixpunkt für G/H und auch für G: $g \in G \Rightarrow gH = a^k H$ für ein $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \varphi(g)(P) = \varphi'(gH)(P) = \varphi'(a^k H)(P) = P$. Falls aH keinen Fixpunkt hat, so gibt es nach Proposition 3.6 einen geraden Weg T in X, der invariant unter aH ist und auf dem aH eine Translation der Größe $m > 0$ induziert. Dies gilt offensichtlich für ganz G/H, da G/H zyklisch ist. Somit ist T auch invariant unter G und es gibt $gH \in G/H$ so, dass gH und somit auch g als nichttriviale Translation auf T wirkt. ($P \in T$: $\varphi(g)(P) = \varphi'(gH)(P) \neq P$).

Es sei T der eindeutige gerade Weg in X, der die Voraussetzungen von (ii) für H erfüllt. Dann ist T auch invariant unter G, da für alle $g \in G$ und $h \in H$ ein $h' \in H$ existiert mit $hg = gh'$ (wegen $H \lhd G$) und somit gilt $h(gT) = g(h'T) = gT$. Da T eindeutig ist, gilt $gT = T$.

Wir erhalten also in zwei Fällen einen Homomorphismus $\lambda: G \to \mathrm{Aut}(T)$, wobei $\lambda(G)$ eine nicht triviale Translation enthält. Wenn wir die Ecken in T mit $\mathbb{Z}$ identifizieren, gilt für $f \in \mathrm{Aut}(T)$ $f(z) = z + n$ oder $f(-z) = -z + n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, da die Abbildung abstandserhaltend sein muss und somit durch f(0) und f(1) festgelegt wird: $f(0) = n \Rightarrow f(1) = n + 1$ oder $f(1) = n - 1$. Sei $g \in \lambda(G)$ die nichttriviale Translation $g(z) = z + n$ für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Angenommen, es existiert ein $h \in \lambda(G)$ mit $h(z) = -z + m$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für $f \in \lambda(G)$, $f(z) = z + k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$) $h(f(z)) = -z - k + m \neq -z + m + k = f(h(z))$ und für $f(z) = -z + k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $g(f(z)) = -z + k + n \neq -z - n + k = f(g(z))$. Das bedeutet, dass für jedes $f \in \lambda(G) \backslash \{id\}$ entweder $f \circ h \neq h \circ f$ oder $f \circ g \neq g \circ f$, also $\mathrm{Cen}(\lambda(G)) = \{1\}$. Dies ist ein Widerspruch, da $\lambda(G)$ nilpotent ist (weil G nilpotent ist), denn dann wäre $Z_2(\lambda(G)) \cong Z_2(\lambda(G))/\{1\} = Z_2(\lambda(G))/\mathrm{Cen}(\lambda(G)) = \mathrm{Cen}(\lambda(G)/\mathrm{Cen}(\lambda(G))) = \mathrm{Cen}(\lambda(G)/\{1\}) \cong \mathrm{Cen}(\lambda(G)) = \{1\}$. Führt man dies induktiv fort, gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ $Z_i(\lambda(G)) = \{1\} \neq \lambda(G)$. Daher gibt es nur Translationen in $\lambda(G)$ und $\lambda(G)$ ist zyklisch, denn setze $m = \min\{ |n| \mid n \in \mathbb{Z} \wedge \exists\, f \in \lambda(G) \text{ mit } f(z) = z + n\}$. Dann gilt für $f(z) = z + m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\lambda(G) = \langle f \rangle = \{ f^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$, wobei $f^k(z) = z + km$. (Angenommen, es existiert $g \in \lambda(G)$, $g(z) = z + n$ mit $n = km + r$, $k \in \mathbb{N}$ und $0 < |r| < m$, so gilt $g \circ f^{-k} \in \lambda(G)$ und $g \circ f^{-k}(z) = (z - km) + km + r = z + r$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von m.) Sei nun für $g \in G$ $k_g \in \mathbb{Z}$ so, dass $\lambda(g) = f^{k_g}$. Dann ist $\gamma: G \to \mathbb{Z}$, $g \mapsto n \cdot k_g$ der gesuchte Homomorphismus aus (ii). □

4.5 Korollar
Wenn G von Elementen mit Fixpunkten erzeugt wird, dann hat G einen Fixpunkt.

Beweis: Angenommen, wir haben Fall (ii) und $G = \langle \{s_1, ..., s_n\} \rangle$. Da $G \to \mathbb{Z}$ nicht trivial ist, hat mindestens ein s_i ein Bild $\neq 0$ in $\mathbb{Z}$. Nach Proposition 3.6 kann so ein Element s_i keinen Fixpunkt haben. Dies ist ein Widerspruch, also haben wir Fall (i), G hat einen Fixpunkt. □

4.6 Korollar
Sei G' die Kommutatorgruppe von G, d.h. $G' = \langle \{[a,b] | a, b \in G\} \rangle$. Weiter sei s ein Element von G mit $s^n \in G'$ für eine ganze Zahl $n \geq 1$. Dann hat s einen Fixpunkt.

Beweis: Die Behauptung ist klar, wenn G einen Fixpunkt hat. Angenommen wir sind im Fall (ii), dann gilt für den Homomorphismus $\gamma: G \to \mathbb{Z}$, dass $G' \subseteq \ker(\gamma)$, da $\mathbb{Z}$ abelsch ist. Folglich ist $\gamma(s^n) = \gamma(s)^n = 0$ und daher auch $\gamma(s) = 0$. Das Element s lässt daher den geraden Weg T fest. □

5 Die Gruppe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$

5.1 Theorem
Die Gruppe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z}) = \{ a \in \mathbb{Z}^{3\times 3} \mid \det(a) = 1 \}$ hat die Eigenschaft (FA).

Beweis: Für $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$ bezeichnen wir mit e_{ij} die Matrix, die 1'en auf der Diagonalen und in der i-ten Zeile und j-ten Spalte hat, und ansonsten überall 0. Es ist bekannt, dass $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ von den e_{ij}, $i \neq j$ erzeugt wird. Setze $z_0 = e_{12}$, $z_1 = e_{13}$, $z_2 = e_{23}$, $z_3 = e_{21}$, $z_4 = e_{31}$, $z_5 = e_{32}$ und $z_{i+6} = z_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir haben dann die folgenden Eigenschaften:

(i) z_i kommutiert mit z_{i+1} und z_{i-1}

(ii) der Kommutator $[z_{i-1}, z_{i+1}]$ ist gleich z_i^{-1} oder z_i (je nach dem, ob i gerade oder ungerade ist)

Insbesondere wird $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ von $\{z_1, z_3, z_5\}$ erzeugt. Außerdem erzeugen für jedes $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ die Elemente z_{i-1} und z_{i+1} eine nilpotente Gruppe B_i und z_i ist in der Kommutatorgruppe von B_i enthalten (nach Eigenschaft (i)).
Nun nehmen wir an, dass $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ auf einem Baum wirkt. Nach Korollar 4.6 (angewandt auf die Gruppe B_i) hat z_i einen Fixpunkt. Weil dies für jedes $i \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gilt, wird B_i von Elementen erzeugt, die Fixpunkte haben, und daher hat B_i nach Korollar 4.5 einen Fixpunkt. Insbesondere hat $z_{i-1}z_{i+1}$ einen Fixpunkt. Also können wir Korollar 4.2 auf $\{z_1, z_3, z_5\}$ anwenden und sehen, dass $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ einen Fixpunkt und somit die Eigenschaft (FA) hat. □

5.2 Korollar
Die Gruppe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ ist kein Amalgam.

Beweis: Anwenden von Theorem 1.4. □

5.3 Bemerkung

(i) Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ und sei G_N die Untergruppe von $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, die von z_1^N, z_2^N und z_3^N erzeugt wird. Dasgleiche Argument wie oben zeigt, dass G_N die Eigenschaft (FA) hat. Weiter gilt:
   a) Jede Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ enthält ein G_N.
   b) G_N ist von endlichem Index in $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$.

(ii) **Theorem Margulis-Tits:** Jede Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ hat die Eigenschaft (FA).

(iii) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat die Eigenschaft (FA) nicht.

6 Verwendete Sätze aus dem Buch „Trees“ von J.P. Serre

Kapitel I. 2.2, Proposition 9
Sei P eine nicht isolierte Endecke eines Graphen X.

(i) X ist zusammenhängend genau dann, wenn X-P ist zusammenhängend.
(ii) Jeder Kreis von X ist in X-P enthalten.
(iii) X ist ein Baum genau dann, wenn X-P ein Baum ist.

Kapitel I. 3.1, Proposition 14
Sei G eine Gruppe, die ohne Inversion auf einen zusammenhängenden Graphen X wirkt, und T' ein Teilbaum von $G\backslash X$. Dann gibt es einen Lift von T' in X.

Kapitel I. 4.1, Theorem 7
Sei $G = G_1 *_A G_2$ ein Amalgam von zwei Gruppen. Dann gibt es einen bis auf Isomorphie eindeutigen Baum X, auf dem G wirkt, mit einem Segment $T = \overset{P}{\circ}\!\xrightarrow{\;y\;}\!\overset{Q}{\circ}$ als Fundamentalbereich und $G_P = G_1$, $G_Q = G_2$ und $G_y = A$.

Kapitel I. 4.3 Proposition 19
Sei G eine Gruppe, die auf einem Baum X wirkt. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Für jede beschränkte Teilmenge A von V(X) ist auch G(A) beschränkt.
(ii) Es gibt ein $P \in V(X)$, sodass G(P) beschränkt ist.
(iii) Es gibt eine Ecke in X, die unter G fest bleibt.

Kapitel I. 4.5, Theorem 10
Es sei G eine Gruppe, die auf einen Graphen X wirkt mit einem Baum T als Fundamentalbereich. Sei (G, T) der Baum von Gruppen, sodass G_P und G_y den Stabilisatoren der Ecken und Kanten von T in G entsprechen (und die Monomorphismen $G_y \to G_{y_1}$ den Inklusionen). Sei $G_T = \varinjlim \{G, T\}$ und Y der mit (G, T) assoziierte Baum. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(i) X ist ein Baum
(ii) $Y \to X$ ist ein Isomorphismus
(iii) $G_T \to G$ ist ein Isomorphismus.

Kapitel I. 5.4, Korollar 1 zu Theorem 13
Sei G eine Gruppe, die (ohne Inversion) auf einem nichtleeren Baum X wirkt. Sei R die Untergruppe von G, die durch die G_P, $P \in V(X)$ erzeugt wird. Dann ist R eine normale Untergruppe von G und G/R kann mit der Fundamentalgruppe des Graphen $Y = G\backslash X$ identifiziert werden.