

Vorlesung

(ATCo) kubische Komplexe

WS 14/15, KIT Karlsruhe, 4SWS + 2U"

Petra Schwer

1. Kapitel : CAT(0) Räume

1.1 Konventionen / Wdh

Ein metrisches Raum (X, d) ist eine Menge X zusammen mit einer Metrik $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h.

$$d(x, y) \geq 0 \text{ mit } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Positivität

$$d(x, y) = d(y, x)$$

Symmetrie

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Δ Ungleichung

Ein metrisches Raum ist vollständig, wenn jede Cauchy Folge konvergiert.

Offene / abgeschlossene Bälle vom Radius r bezeichnen wir mit

$$B_r(x) = \{ y \in X \mid d(x, y) < r \}$$

$$\bar{B}_r(x) = \{ y \in X \mid d(x, y) \leq r \}.$$

Ist $Y \subset X$ so bezeichnen wir die Einschränkung der Metrik von X auf Y als die induzierte Metrik auf Y .
von X

1.2 Def. (X, d) metr. Raum

Eine Geodäte von x nach y ~~ist~~, $\gamma: x \rightsquigarrow y$ ist eine stetige Abb $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ so, dass

$$\gamma(a) = x, \gamma(b) = y \text{ und}$$

$$(*) \quad d(\gamma(t), \gamma(t')) = |t - t'| \quad \forall t, t' \in [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

Das Bild von γ in X ist eine Strecke von x nach y in X . Schreibe $\overline{xy} := \gamma([a, b])$.

Eine lokale Geodäte ist eine ^{stetige} Abb $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ mit

(**) $\forall t \in [a, b] \exists \varepsilon > 0$ s.d. $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ eine Geodäte ist.

Ein geodätischer Strahl / eine geodätische Linie ist ein $\gamma: [0, \infty) \rightarrow X$ bzw. $\gamma: (-\infty, \infty) \rightarrow X$ s.d.

(*) gilt $\forall t, t' \in \mathbb{R}^+$ bzw. $\in \mathbb{R}$.

1.3 Def. Wir sagen (X, d) ist ein geodätischer Raum wenn $\forall x, y \in X$ eine Geodäte $\gamma: x \rightsquigarrow y$ von x nach y existiert. Der Raum X ist eindeutig geodätisch wenn genau eine solche Geodäte existiert.

1.4 Beispiele $\mathbb{R}^n$, Vollst. Riem. Mfden sind geod. metr. Räume

a) $\mathbb{R}^n$ mit der p -Norm $1 \leq p < \infty$

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$ ist vollständiger, normierter VR (d.h. Banachraum)

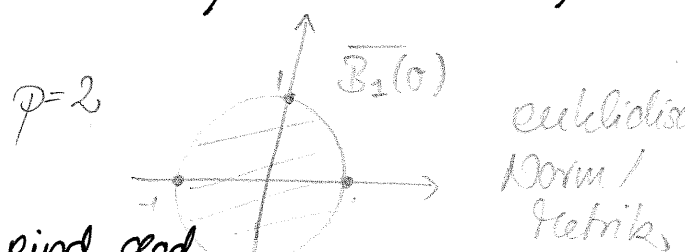
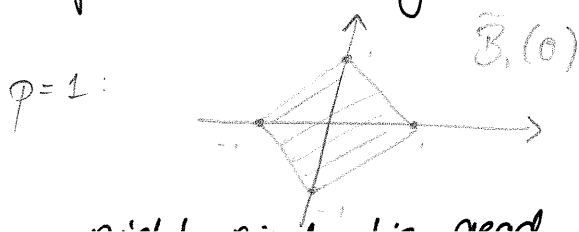
mit Metrik $d_p(x, y) := \|y - x\|_p$.

Die Metrik d_p ist geodätisch (in anderen Worten (X, d_p) ist geodätischer metrischer Raum).

Die Abb $\gamma: [0, \|y-x\|_p] \rightarrow X = \mathbb{R}^n$

$t \mapsto ((\|y-x\|_p - t) \cdot x + t \cdot y) \cdot \frac{1}{\|y-x\|_p}$

definiert eine Geodäte von x nach y . (ÜA)

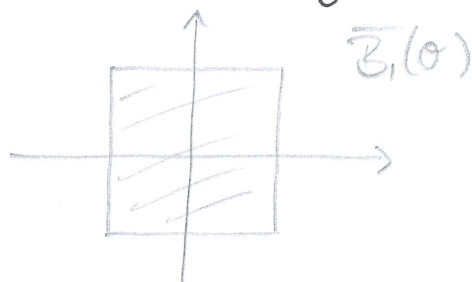


b) ℓ^∞ -norm auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty := \max_i \{ |x_i|, i=1, \dots, n \}$$

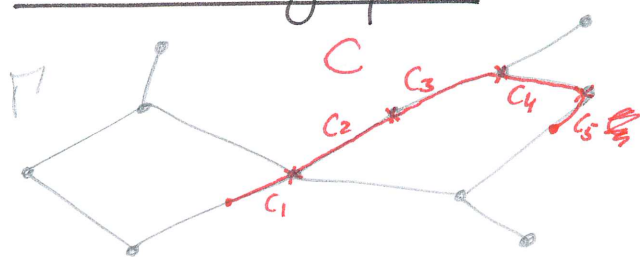
Definiere ~~die~~ Metrik wie in a).

Für Beschreibung der Geodäten vergleiche Ü11



nicht eindeutig
geodätisch

c) metrische Graphen: $\mathcal{G} = (V, E)$



versehe jede Kante
 $e \in E$ mit einer
Länge $\ell(e)$ und

definiere für einen

stückweise lineare Pfad $C: [a, 1] \rightarrow X = \text{geom. Realis. von } \mathcal{G}$

$$l(C) = \sum_{i=1}^{n-1} l(C_i)$$

$$C_i: [t_i, t_{i+1}] \hookrightarrow e = \text{Kante}$$

$$C = C_1 * \dots * C_{n-1} \quad \text{mit } C_i(t_i) = C_{i-1}(t_i) \text{ und } C_i(t_i) = e \text{ f\"ur } \forall i > 2 \quad \forall i = 2 \dots n-1$$

$$d: X * X \rightarrow \mathbb{R}^+ : d(x, y) := \inf \{ l(C) \mid C: x \rightsquigarrow y \text{ st\"uckw. lin. Pfad} \}$$

Wenn $\mathcal{G}$ zusammenhängend ist, so ist (X, d) geodätisch. Außerdem ist (X, d) eindeutig geodätisch, wenn $\mathcal{G}$ keine Kreise hat.

d) $\mathbb{S}^2 \cong \partial \bar{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ ist geodätisch aber nicht mit Standard Metrik eindeutig geodätisch.

e) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist metr. Raum der nicht geodätisch ist.
mit $d := d_2$.

-4-

1.5 Def. Ein geodätisches Dreieck $\Delta = \Delta(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ in einem metr. Raum (X, d) ist geg. durch ein Tripel x, y, z von Punkten und Geodäten $\alpha: x \rightsquigarrow y$, $\beta: y \rightsquigarrow z$ und $\gamma: z \rightsquigarrow x$, den Seiten von Δ .

$\triangle$ Geod. Dreiecke sind i.A. durch ihre Ecken nicht eindeutig bestimmt.

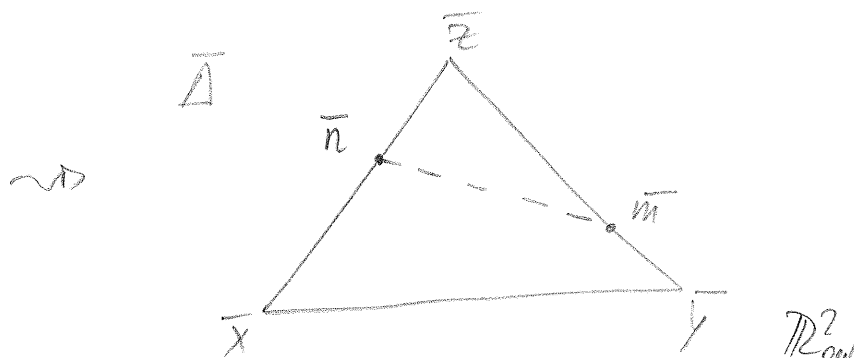
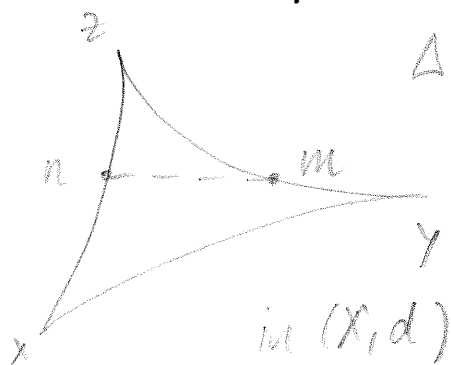
Ein Dreieck $\bar{\Delta}$ in $\mathbb{R}_{\text{eukl}}^2 = (\mathbb{R}^2, d_2)$ ist Vergleichsdreieck von Δ , wenn gilt

$$d(x, y) = d_2(\bar{x}, \bar{y}), \quad d(y, z) = d_2(\bar{y}, \bar{z}) \quad \text{und} \\ d(z, x) = d_2(\bar{z}, \bar{x}).$$

(hier $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.)

1.6 Def. Ein Dreieck Δ in (X, d) hat die CAT(0) Eigenschaft wenn gilt $d(n, m) \leq d_2(\bar{n}, \bar{m})$

$\forall n, m$ und ihre Vergleichspunkte $\bar{n}, \bar{m}$ auf Seiten von Δ bzw. $\bar{\Delta}$



$\bar{n}$ so gewählt, dass $d(n, x) = d_2(\bar{n}, \bar{x})$
und $d(n, z) = d_2(\bar{n}, \bar{z})$.

$\bar{m}$ analog

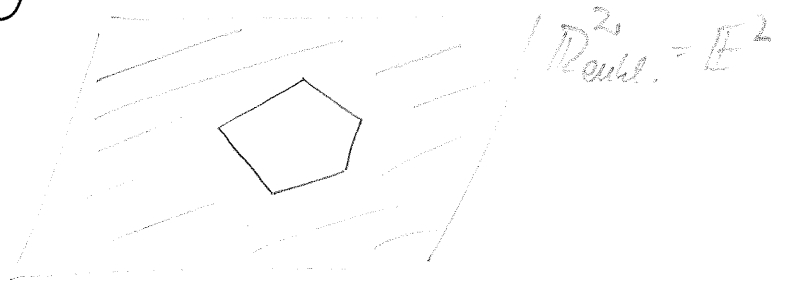
(X, d) ist ein CAT(0) - Raum, wenn (X, d) geodätisch ist und alle seine Dreiecke die CAT(0) Eigenschaft erfüllen.

(X, d) ist lokal CAT(0), wenn gilt
 $\forall x \in X \exists r_x > 0$ s.d. $B_{r_x}(x)$ mit der induzierten Metrik ein CAT(0)-Raum ist.

- Bem. 1) lokal CAT(0) Räume heißen auch nicht-positiv gekrümmte oder Alexandrov Räume
 2) CAT(0) steht für Cartan-Alexandrov-Toponogov Raum der Krümmung ≤ 0 .

1.7 Beispiele

- a) konvexe Teilmengen ~~in~~ des eukl. Raumes $\mathbb{E}^n$ sind (zus. mit der induzierten Metrik) CAT(0) Räume
- b) Komplemente von Polygonen in $\mathbb{R}_{\text{eukl.}}^2$ sind lokal CAT(0) aber nicht CAT(0)
- c) endliche Graphen ohne Kreise
- d) $\mathbb{R}$ -Bäume sind CAT(0). Wir definieren:
 ein metr. Raum (T, d) mit
 (i) $\exists$ eind. geod. Segment $[x, y]$ $\forall$ Punkte $x, y \in T$
 (ii) falls $[y, x] \cap [x, z] = \{x\}$ dann ist $[y, x] \cup [x, z]$ eine Geodäte
 heißt $\mathbb{R}$ -Baum. (ÜA)



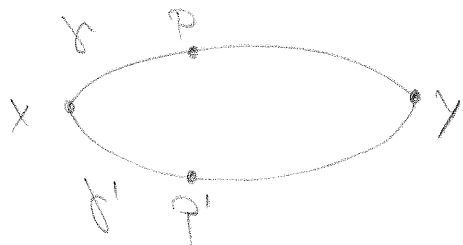
1.8 Satz (elementare Eigenschaften)

Sei (X, d) ein CAT(0) Raum. Dann gilt

- (1) X ist eindeutig geodätisch
- (2) $B_r(x)$ ist zusammenziehbar $\forall r$, m.a.W. X ist kontrahierbar
- (3) jede lokale Geodäte ist Geodäte.

Beweis

- (1) Seien $\gamma: x \rightsquigarrow y$ und $\gamma': x \rightsquigarrow y$ zwei ^{a priori (verschiedene)} Geodäten von x nach y . Seien p und p' Punkte auf γ bzw. γ' mit $d(x, p) = d(p', x)$.



Das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ zum Dreieck

$$\Delta = \Delta(x, p, y, \gamma|_{[0, d(x, p)]}, \gamma|_{[d(x, p), d(x, y)]}, \gamma'|_{[0, d(x, p)]}, \gamma'|_{[d(x, p), d(x, y)]})$$

ist degeneriert und $\bar{p} = \bar{p}'$.

Aus der CAT(0) Eigenschaft folgt:

$$0 = d(\bar{p}, \bar{p}') \geq d(p, p') \geq 0.$$

Somit $p = p'$.

- (2) folgt aus (1):

Die Abbildung $B_r(x) \times [0, 1] \rightarrow X$

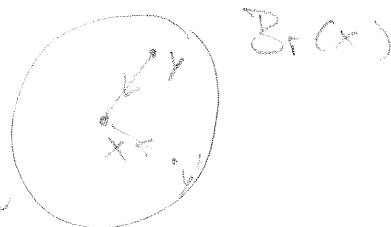
$$(y, t) \mapsto \text{Punkt } p \text{ auf } \overline{xy} \text{ mit } d(y, p) = t \cdot d(x, y)$$

ist eine stetige Retraktion von $B_r(x)$ nach x .

(stetig weil geod. eindeutig)

Kontraktion

längs Geodäten



(3) Sei $\gamma: [0, l] \rightarrow X$ lokale Geodäte. Definiere
 $S := \{t \mid \gamma|_{[0, t]}$ ist Geodäte $\}$.

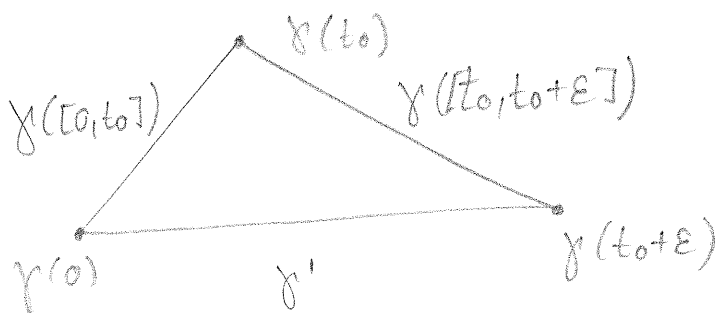
Es ist z.z. S ist offen (und abgeschlossen) in $[0, l]$
(klar)

Die Menge S enthält eine Umgebung des 0 in t_0 ,
 weil γ eine lokale Geodäte ist.

Sei $t_0 \in S$ mit $0 < t_0 < l$.

Dann existiert $\varepsilon > 0$ so, dass $\gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ eine
 Geodäte ist (nach Def. lokale Geodäte).

Betrachte das Dreieck $\Delta = \Delta(\gamma(0), \gamma(t_0), \gamma(t_0 + \varepsilon) \dots)$



2 Seiten $\hat{=}$ $\gamma([0, t_0 + \varepsilon])$

3. Seite $\gamma' \hat{=}$ eindeutig
 Geodäte von
 $\gamma(0)$ nach $\gamma(t_0 + \varepsilon)$

Dann ist das Vergleichsdreieck $\bar{\Delta}$ von Δ immer
 degeneriert.

Bew: Ann $\bar{\Delta}$ nicht degeneriert. Dann liefert die
 CAT(0) Eigenschaft angewandt auf ~~die~~ Punkte
 $x \in \overline{\gamma(0), \gamma(t_0)}$ und $y \in \overline{\gamma(t_0), \gamma(t_0 + \varepsilon)}$

d.h. $\nearrow$ nahe an $\gamma(t_0)$ einen Widerspruch zur
 Tatsache, dass $\gamma|_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ Geodäte ist. $\square$
 näher als ε

Somit ist $\gamma|_{[0, t_0 + \varepsilon]}$ eine Geodäte und

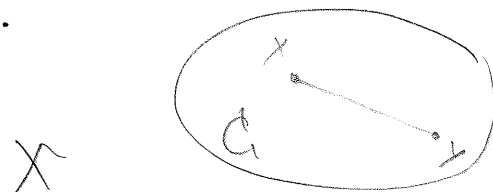
$(t_0, t_0 + \varepsilon) \subset S \Rightarrow S$ ist offen.

Idee:

$\square$

1.9 Def. (X, d) metr. Raum. Eine Teilmenge $C \subset X$ -8-
heißt konvex, wenn $\forall x, y \in C$ alle geod. Segmente
von x nach y aus X in C enthalten sind.

Bem. Ist X eind. geod. so bed. das, dass die eind.
Geodäte in C enthi. sein muss.



Bem. Konvexe Teilmengen
von CAT(0) Räumen sind
wieder CAT(0) Räume.

Coroll. VI
21.10

(Projektionen auf konvexe Teilmengen)
1.10 Satz Sei X vollst. CAT(0) Raum und $C \subset X$
abgeschlossen und konvex. Dann gilt:

(1) $\forall x \in X \exists! \pi_C(x) \in C$ mit

$$d(x, \pi_C(x)) = \inf_{p \in C} d(x, p) =: d(x, C)$$

(2) Es gilt $d(\pi_C(x), \pi_C(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Bew.
UA d.h. die Abb. $\pi_C: X \rightarrow C, x \mapsto \pi_C(x)$ ist nicht
abstandsvergrößernd.

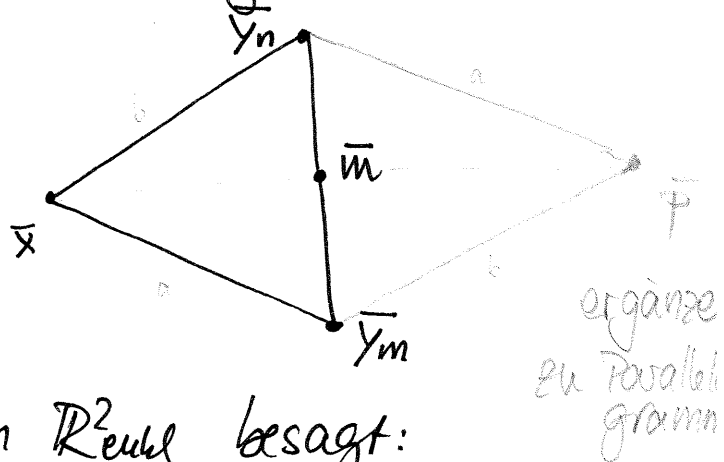
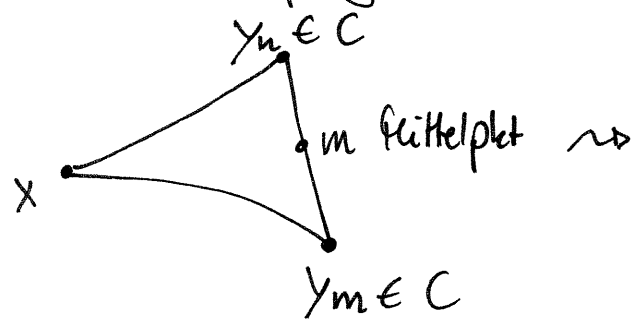
(3) Ist $y \in \overline{X \pi_C(x)}$ so ist $\pi_C(y) = \pi_C(x)$.
geodätisches Segment

Beweis

(1) Sei $y_n \in C$ eine Folge so, dass $d(x, y_n) \rightarrow d(x, C)$

Wir zeigen: (y_n) ist Cauchy Folge.

Betrachte folgendes Dreieck & Vergleichsdreieck:



- Die Parallelogrammgleichung in $\mathbb{R}^2$ besagt:

$$2 \cdot (d(\bar{x}, \bar{y}_n)^2 + d(\bar{x}, \bar{y}_m)^2) = d(\bar{x}, \bar{p})^2 + d(\bar{y}_n, \bar{y}_m)^2$$

- Setze $\delta := d(x, G')$ und wähle n, m groß genug so, dass $d(x, y_n)$ und $d(x, y_m) < \delta + \varepsilon$ für geg. ε . (*)

- Aus der CAT(0) Eigenschaft von X folgt:

$$d(\bar{x}, \bar{m}) \geq d(x, m) \geq d(x, G') \quad (**)$$

$$d(x, y_n) = d(\bar{x}, \bar{y}_n) <$$

Somit gilt:

$$d(y_n, y_m)^2 \stackrel{\text{Parallelogr. gl.}}{=} d(\bar{y}_n, \bar{y}_m)^2 = 2 \cdot (d(\bar{x}, \bar{y}_n)^2 + d(\bar{x}, \bar{y}_m)^2) - d(\bar{x}, \bar{p})^2$$

$$\stackrel{(*)}{<} 4 \cdot (\overbrace{d(x, G') + \varepsilon}^{=\delta})^2 - 4 \cdot d(x, G')^2$$

und (**) weil $d(\bar{x}, \bar{p}) = 2 \cdot d(\bar{x}, \bar{m})$.

$$= 8 \cdot d(x, G') \cdot \varepsilon + \varepsilon^2 \cdot 4 = 4 \cdot (2d(x, G')\varepsilon + \varepsilon^2)$$

$\Rightarrow (y_n)_n$ ist Cauchy Folge und hat insbes. einen Grenzwert in G' mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = d(x, G')$. Setze $\pi_G(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Eindeutigkeit folgt automatisch. (Details L. 10)

Bew(2) $\bar{u}A$

Bew(3) : Ann: $\pi_C(y) \neq \pi_C(x)$.

Dann ist insbesondere $d(y, \pi_C(y)) < d(y, \pi_C(x))$ (*)

und somit

$$d(x, \pi_C(y)) \leq d(x, y) + d(y, \pi_C(y)) \stackrel{(*)}{<} d(x, y) + d(y, \pi_C(x))$$

$$\text{weil } y \in \overline{\pi_C(x)X} \rightarrow = d(x, \pi_C(x))$$

$\Downarrow$ zur ~~Eindeutigkeit~~ Minimalität von $\pi_C(x)$.

$\square_{C3}$

Zur Motivation des nächsten Resultate etwas Geschichte:

- Elie Cartan (1928) Leçons sur la géométrie de Riemann

zeigte, dass für eine vollst. Riem. Mfkt Γ nichtpositiver Krümmung für jede endl. Menge ein Zentrum existiert

D.h. $\forall \{x_1, \dots, x_n\}$ hat $x \mapsto \sum_{i=1}^n d(x, x_i)^2$ ein Minimum.

Damit zeigt er, dass kompakte Isometriegr. von Γ immer einen Fixpkt haben.

- Bruhat - Tits (72, groupes réductifs sur un corps local) verallgemeinern dieses Resultat auf Euklidische Gebäude (eine spez. Klasse von (AFN) Räumen. später mehr!)

$\leadsto$ heute für (AFN) Räume

1.11 Def. Der Radius einer beschränkten Menge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist

$$\text{rad}(Y) := \inf \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid Y \subseteq \overline{B}_r(x) \text{ für ein } x \in X \}$$

1.12 Bruchat-Tits Satz (vgl. 7.4 II.27)

Sei X ein vollständiger (M.T.) Raum und sei $Y \subset X$ eine beschränkte Teilmenge.

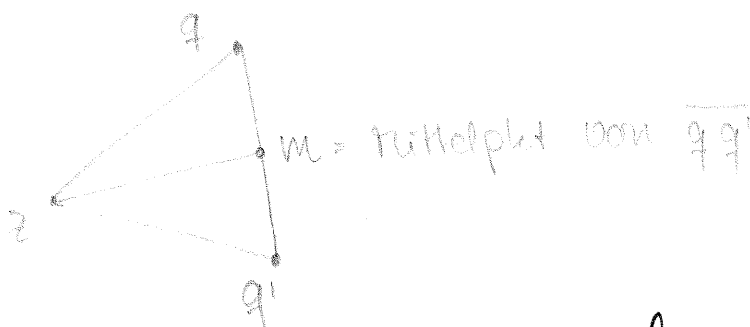
Dann gibt es genau ein $p \in X$ mit $\overline{B}_r(p) \supseteq Y$ und $r = \text{rad}(Y)$. Wir nennen p das Zentrum von Y .

Beweis: Sei $r = \text{rad}(Y)$ und $p, p' \in X$ Punkte mit

$$\overline{B}_r(p) \cap \overline{B}_r(p') \supseteq Y. \quad \text{Vorüberlegung:}$$

Antinomie:

Seien $q, q' \in X$ Punkte mit $\overline{B}_{r+\varepsilon}(q) \cap \overline{B}_{r+\varepsilon}(q') \supseteq Y$.
Sei $z \in Y$. Betrachte das Dreieck $\Delta = \Delta(z, q, q')$.



$$r = \text{rad}(Y)$$

$$\varepsilon =$$

Mit Parallelogrammgleichung für das (vgl. Dreieck Δ gilt (analog zu 1.10):

$$d(q, q')^2 \leq 4 \cdot (r^2 + 2r\varepsilon + \varepsilon^2) - 4r^2. \quad (*)$$

~~Betrachte~~

Daraus folgt die Eindeutigkeit des Zentrums:

Seien $q \neq q'$ Zentren so kann $\varepsilon = 0$ gewählt werden in $(*) \Rightarrow d(q, q') = 0 \quad \text{⚡}$

Für die Existenz eines Zentrums betrachte eine Folge $(p_n)_n$ in X mit $\overline{B_{r+\frac{1}{n}}(p_n)} \supseteq Y$.

So folgt aus (*), dass p_n Cauchy Folge ist mit GW p in X .

Es gilt $\forall y \in Y$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} d(y, p_n) \leq r$ und somit $\overline{B_r(p)} \supseteq Y$. □

~~Def. 1.13 Eine Isometrie $p: X \rightarrow X'$ ist eine ~~Abb~~ bij. / (isometrische Einbettung) surjektive (injektive) Abb. vom metr. Raum (X, d) in den Raum~~

Def. 1.13 (X, d) metrischer Raum, G eine Gruppe. Eine isometrische Wirkung von G auf X ist ein Homomorphismus $G \rightarrow \text{Iso}(X)$. Die Fixpunktmenge von G ist $X^G = \{x \in X \mid g(x) = x \ \forall g \in G\}$.

1.14 Korollar X vollst. $\text{Aff}(0)$ Raum, G endliche Gruppe von Isometrien oder G ~~endl.~~ ~~ist~~ Gruppe von Isometrien mit beschränktem Orbit.
Dann ist $X^G \neq \emptyset$ und konvex.

Beweis Sei $Y :=$ ein beschränkter Orbit von G in X .

Im Fall, dass G endl. ist ist jedes Orbit Gx beschränkt durch $\max \{d(gx, g'x) \mid g, g' \in G\}$ für ein festes x .

Wende Bruhat-Tits Satz an $\leadsto \exists!$ Zentrum p auf einem Orbit $Y = G \cdot x$.

Da Y G -invariant ist, ist auch p G -invariant.

(d.h. Fixpunkt)

also $X^G \neq \emptyset$.

Konvexität folgt aus der Tatsache, dass X eindeutig geodätisch ist und ÜA4 Blatt 2.
vegl. eind. geod. $\Rightarrow X^G$ konvex. $\square$

Es gilt genau:

1.15 Bruhat-Tits Fixpunktsatz:

X vollst. CAT(0) Raum, $G \curvearrowright X$ isometrisch.

Es sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine beschränkte G -Bahn
- 2) alle G -Bahnen sind beschränkt
- 3) $X^G \neq \emptyset$, d.h. es gibt Fixpunkte.

Beweis: $2) \Rightarrow 1) \xRightarrow{1.14} 3) \Rightarrow 2)$

Bleibt z.z. $3) \Rightarrow 2)$: wähle $x \in X^G$ und ein bel. $y \in X$. Dann ist $G \cdot y \subseteq \mathcal{B}_{d(x,y)}(x)$ und somit beschränkt. $\square$

Weitere Eigenschaften von CAT(0) Räumen:

1.16 Satz

Jede lokale Isometrie $g: X \rightarrow Y$ wobei X ein geodätischer metrischer Raum und Y CAT(0) Raum ist, ist eine isometrische Einbettung.
 $d_Y(g(x), g(y)) = d_X(x, y)$

Beweis Sei $g: X \rightarrow Y$ wie oben und für beliebige Punkte $x, y \in X$ $\gamma: X \rightarrow Y$ eine Geodäte.

Dann ist $g \circ \gamma$ lokale Geodäte in Y .

Teil 1.8(3) gilt, dass $g \circ \gamma$ Geodäte in Y ist.

$$\text{Also ist } d_x(g(x), g(y)) = L(g \circ \gamma) = \underset{\uparrow}{L(\gamma)} = d_x(x, y).$$

Länge von Kurven ist
invariant unter lok. Isometrie □

lokal-global Prinzip $\rightarrow$

1.17 Cotan-Hadamard-Satz vgl. BH II.4.1 p 193

Sei (X, d) vollst., zshgd. metr. Raum. Dann gilt:

(1) Ist d lokal konvex so ist die auf der universellen Überlagerung induzierte Längenmetrik konvex (global).

Insbesondere ist die univ. üL eindeutig geodätisch.

(2) Ist X CAT(0) so ist auch $\tilde{X}$ mit der induzierten Längenmetrik CAT(0).

ohne Beweis.

1.18 Wdh / Def induzierte Längenmetrik

Sei (X, d) metr. Raum, dann ist d eine Längenmetrik, wenn gilt: $d(x, y) = \inf \{ l(\gamma) \mid \gamma \text{ Kurve von } x \text{ nach } y \}$
↑
rektifizierbar

Ist d Längenmetrik so nennen wir (X, d) Längenraum.

Wenn γ nicht rektifizierbar so setze $d(x, y) = \infty$.

Bsp. Längenraum der nicht geodätisch ist.

1.19 Proposition (induzierte Längenmetrik)

Sei (X, d) metrischer Raum, $\bar{d}: X \times X \rightarrow [0, \infty]$

die Abb. die jedem Paar (x, y) den Wert

$$\bar{d}(x, y) = \inf \{ l_\gamma(x, y) \mid \gamma: x \rightarrow y \text{ rektifizierbare Kurve} \}$$

zuordnet. Dann gilt:

(1) $\bar{d}$ ist Metrik auf X

(2) $\bar{d}(x, y) \geq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

(3) Ist $c: [a, b] \rightarrow X$ stetig bzgl. der Topologie von d so ist c stetig bzgl. der von $\bar{d}$.

(4) $c: [a, b] \rightarrow X$ stetig und rektifizierbar in (X, d) dann auch stetig und rektif. in $(X, \bar{d})$.

(5) $l_d(c) = l_{\bar{d}}(c)$.

(6) $\bar{\bar{d}} = \bar{d}$.

Beweis: (1) und (2) klar nach Def. von Länge

(2) $\Rightarrow$ (3) ist klar

(4) & (5) $\Rightarrow$ (6) und (4) folgt mit BHI.20 (5)

elem. Eigensch. von Kurven

bleibt zz. (5):

Sei $c: [a, b] \rightarrow X$ Kurve mit Länge $l_{\bar{d}}(c)$ bzgl. $\bar{d}$ und $l_d(c)$ bzgl. d . Mit (2) gilt $l_{\bar{d}}(c) \geq l_d(c)$.

$$\text{Weiter ist } l_{\bar{d}}(c) = \sup_{\substack{a=t_0 < t_1 < \dots < t_k=b}} \sum_{i=0}^{k-1} \bar{d}(c(t_i), c(t_{i+1}))$$

$$\stackrel{\substack{\bar{d}(x,y) = \inf \{ l_\gamma(x,y) \} \\ \leq}}{\leq} \sup_{a=t_0 < \dots < t_k=b} \sum_{i=0}^{k-1} l_d(c|_{[t_i, t_{i+1}]}) = l_d(c). \quad \square$$

Wir nennen $\bar{d}$ die zu d gehörende Längenmetrik.

Die induzierte Längenmetrik auf $Y \subseteq X$ ist die zu $d|_Y$ gehörende Längenmetrik.

Ende 24.10.

Bem. Im Allgemeinen ist die induzierte Längenmetrik von $Y \subseteq X$ mit (X, d) metr. Raum verschieden von der Einschränkung der Längenmetrik von X auf Y , d.h. $\overline{d}|_Y \neq \overline{d}_Y$.

Bsp. 1.20 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist Längenraum aber nicht geodätisch.

1.21 Satz von Hopf - Rinow (siehe BH I 3.7)

Sei X ein Längenraum. Ist X vollständig und lokal kompakt so gilt

- (1) jede abgeschl. und beschränkte Teilmenge von X ist kompakt
- (2) X ist geodätisch.

ohne Beweis.

weggelassen

Ein großes Problem ist es für einen geg. Raum zu testen ob dieser (ATC) ist.

Ein paar (wenige) Hilfsmittel sind bekannt.

Bevor wir näher darauf eingehen können müssen wir die lokale Struktur (Winkel, Raum der Richtungen, ...) eines (ATC) Raumes besser odometrischen

verstehen.

Winkel und Raum der Richtungen:

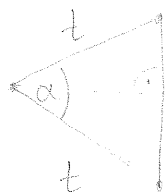
1.21 Def. Sei X ein $\text{CAT}(0)$ Raum und $\gamma, \gamma': [0, \varepsilon] \rightarrow X$

geodätische mit $\gamma(0) = \gamma'(0) = p$.

Definiere den Winkel $\alpha = \angle_p(\gamma, \gamma')$ durch

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t), \gamma'(t))}{2 \cdot t} \leq 1 \quad (*)$$

In der eukl. Geometrie:



und $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}t}$

liegen in gleichschenkeligen
dort ≤ 1 weil
gleichschenkelig

Da die Metrik d eines $\text{CAT}(0)$ Raumes
konvex ist gilt für alle s, t mit $0 \leq s \leq t \leq \varepsilon$
b.w.

$$0 \leq \frac{d(\gamma(s), \gamma'(s))}{2 \cdot s} \leq \frac{d(\gamma(t), \gamma'(t))}{2 \cdot t} \leq 1$$

also existiert der GLW in $(*)$ und ist ≤ 1

somit ist α wohldefiniert. ┘

Wir wollen zeigen, dass der Winkel eine Pseudo-
Metrik auf der Menge aller Pfade γ mit $\gamma(0) = p$
(für festes p) bildet.

Bem Im Allgemeinen ist nicht zu erwarten, dass $\angle_p$
eine Metrik ist. (Positivität scheitert,)
finde Bsp. (ÜA)

1.22 Notation: Sei X CAT(0) Raum, $p \in X$ fest.

Für Pkte $x, y \in X \setminus \{p\}$ gibt es eindeutige Geodäten $\gamma: p \rightsquigarrow x$, $\gamma': p \rightsquigarrow y$. Wir können daher definieren:

$$\angle_p(x, y) = \angle_p(\gamma, \gamma') \text{ den } \underline{\text{Winkel}} \text{ von } x, y \text{ an } p.$$

Ist ~~p, x, y~~ $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ Vergleichsdreieck von $\Delta_p(x, y)$

setze $\bar{\angle}_p(x, y) := \angle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{y})$ den
Vergleichswinkel von x und y an p .

Bem: Es gilt: $\bar{\angle}_p(x, y) \geq \angle_p(x, y)$

wegen Konvexität des Metrik in X .

1.23 Lemma Sei X CAT(0) und $p \in X$.

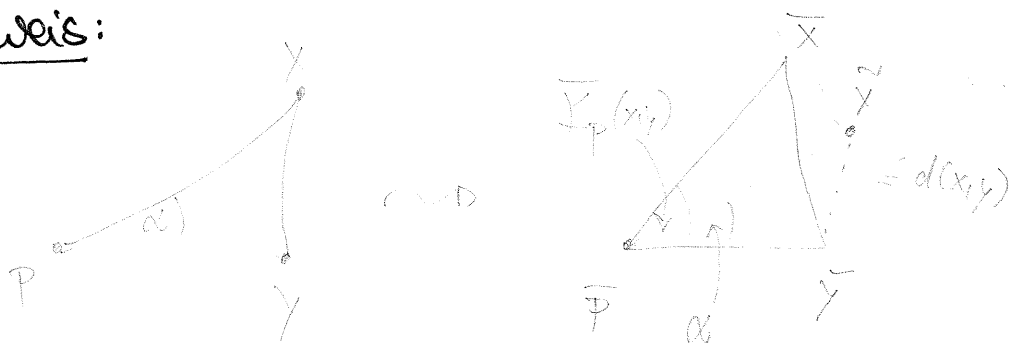
Seien $x, y \in X \setminus \{p\}$ und $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$ Vergleichsdreieck.

Wähle $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ so, dass $d(\tilde{x}, \bar{p}) = d_{\text{euk.}}(\bar{x}, \bar{p})$ und

$$\angle_{\bar{p}}(\bar{y}, \tilde{x}) = \angle_p(x, y). \quad \text{Dann gilt}$$

$$d(x, y) \geq d_{\text{euk.}}(\bar{y}, \tilde{x}).$$

Beweis:



□

1.24 Lemma (X CAT(0)), $p \in X$, γ, γ' Geodäten, die in p starten und in x bzw. y enden.

Dann gilt $\forall s, t > 0$ im Def. Bereich von γ :

$$\chi_p(\gamma, \gamma') \leq \overline{\chi}_p(\gamma(s), \gamma'(t)) \leq \overline{\chi}_p(x, y).$$

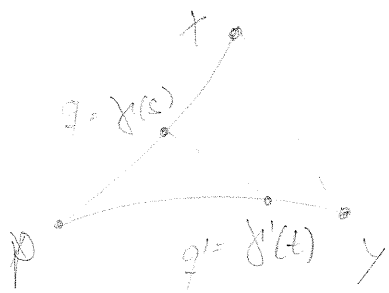
Beweis

Bem.
nach 1.22
1.22

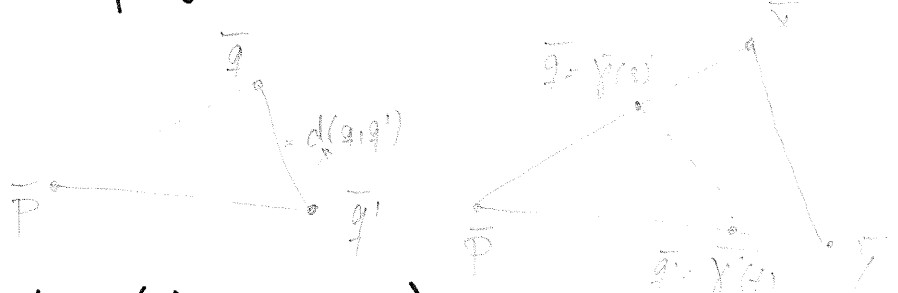
Die erste Ungleichung folgt aus der Konvexität der Metrik in X .

Die zweite Ungl. zeigt man wie folgt:

Betrachte das Dreieck $\Delta(p, x, y)$ und die Pkte $\gamma(s), \gamma'(t)$ auf seinen Seiten.



Betrachte Vergleichsdreiecke $\Delta(\bar{p}, \bar{\gamma}(s), \bar{\gamma}'(t))$ und $\Delta(\bar{p}, \bar{x}, \bar{y})$



Es ist $d(q, q') \leq d_{\text{eukl}}(\bar{\gamma}(s), \bar{\gamma}'(t))$ nach der CAT(0) Bed. vom großen Dreieck.

Somit ist $\overline{\chi}_p(\gamma(s), \gamma'(t)) \leq \overline{\chi}_p(x, y)$.

□

1.25 Satz X CAT(0) Raum und $p \in X$, dann ist

χ_p eine Pseudometrik auf $X \setminus \{p\}$ (bzw. auf dem Raum aller Geodäten, die in p starten).

"Def"

Eine Pseudometrik ist eine Abb $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

- s.d. gilt:
- a) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0 = d(x,x) \quad \forall x,y \in X$
 - a) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Im Gegensatz zur Metrik gilt nicht: $d(x,y) = 0 \Rightarrow x=y$.

sid. auf Extrablatt

Beweis: (1) ist klar. Wir beweisen die Dreiecksungleichung. (mit $\frac{1}{2}$ Beweis).

Ann: $\exists$ Geodätische $\gamma, \gamma', \gamma''$ von p nach x, y, z

so, dass $\underbrace{\bar{\chi}_p(\gamma, \gamma'')}_{= \alpha} > \underbrace{\bar{\chi}_p(\gamma, \gamma')}_{= \beta} + \underbrace{\bar{\chi}_p(\gamma', \gamma'')}_{= \gamma}$.

nicht verwenden! ausschreiben!!

Dann existiert $\delta > 0$ s.d. (*) $\alpha \neq \beta + \gamma + 3\delta$

und $\exists \varepsilon > 0$ so, dass $\forall 0 < s, t \leq \varepsilon$ gilt:

(monoton fallend in $s, t \rightarrow 0$ (vgl. Bes. 1.24))

$$\bar{\chi}_p(\gamma(s), \gamma'(t)) < \bar{\chi}_p(\gamma, \gamma') + \delta \quad (1)$$

$$\bar{\chi}_p(\gamma'(s), \gamma''(t)) < \bar{\chi}_p(\gamma', \gamma'') + \delta \quad (2)$$

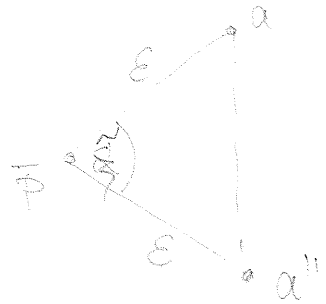
Betrachte Punkte $\bar{p}, a, a''$ in $\mathbb{R}^2$ mit

$$d(\bar{p}, a) = \varepsilon = d(\bar{p}, a'') \quad \text{und} \quad \bar{\chi}_{\bar{p}}(a, a'') = \tilde{\xi}$$

wobei $\tilde{\xi} < \pi$ und

$$\xi := \bar{\chi}_p(\gamma(\varepsilon), \gamma''(\varepsilon)) > \tilde{\xi}$$

$$\text{ sowie } \tilde{\xi} > \underbrace{\bar{\chi}_p(\gamma, \gamma'')}_{= \beta} = \beta$$



Also können wir

Wähle a' auf der Strecke aa'' so, dass $\underbrace{\bar{\chi}_p(\gamma, \gamma') + \bar{\chi}_p(\gamma', \gamma'')}_{\text{mit als } (*)}$

$$\alpha := \bar{\chi}_{\bar{p}}(a, a') > \bar{\chi}_p(\gamma, \gamma') + \beta$$

Beweis 1.25: zz. (mit 1.24) Δ_p erfüllt die Δ -Ungl. Annahme zu
-24-

Ann. $\exists$ geodätische $\gamma, \gamma', \gamma''$ von p nach x, y, z mit

$$\Delta_p(\gamma, \gamma'') > \Delta_p(\gamma, \gamma') + \Delta_p(\gamma', \gamma'')$$

Dann $\exists \delta > 0$ s.d. $\Delta_p(\gamma, \gamma'') > \Delta_p(\gamma, \gamma') + \Delta_p(\gamma', \gamma'') + 3\delta$ (1)

und $\exists \varepsilon > 0$ s.d. $\forall 0 < s \leq \varepsilon$ gilt

$$\overline{\Delta}_p(\gamma(s), \gamma'(t)) < \Delta_p(\gamma, \gamma') + \delta \quad (1)$$

$$\Delta_p(\gamma', \gamma'') < \overline{\Delta}_p(\gamma'(s), \gamma''(t)) < \Delta_p(\gamma', \gamma'') + \delta \quad (2)$$

mit 1.24
fallend gegen $\Delta_p(\gamma', \gamma'')$
für $s, t \rightarrow 0$.

Betrachte Punkte $\bar{p}, a, a''$ in $\mathbb{R}^2$ mit

$d(\bar{p}, a) = \varepsilon = d(\bar{p}, a'')$ und $\Delta_{\bar{p}}(a, a'') = \tilde{\xi} < \pi$

und $\xi := \overline{\Delta}_p(\gamma(\varepsilon), \gamma''(\varepsilon)) > \tilde{\xi}$ sowie $\tilde{\xi} > \Delta_p(\gamma, \gamma'') - \delta$



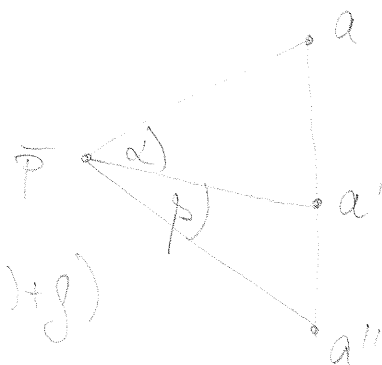
nach 1.24, ξ also „dazw.“ gewählt

Es gilt mit (1), dass $\Delta_p(\gamma, \gamma'') - \delta > (\Delta_p(\gamma, \gamma') + \delta) + (\Delta_p(\gamma', \gamma'') + \delta)$

also können wir a' auf aa'' wählen so, dass

$$\alpha := \Delta_{\bar{p}}(a, a') > \Delta_p(\gamma, \gamma') + \delta$$

und $\beta := \Delta_{\bar{p}}(a', a'') > \Delta_p(\gamma', \gamma'') + \delta$



(weil $\alpha + \beta = \tilde{\xi} > \Delta_p(\gamma, \gamma') + \delta + \Delta_p(\gamma', \gamma'') + \delta$)

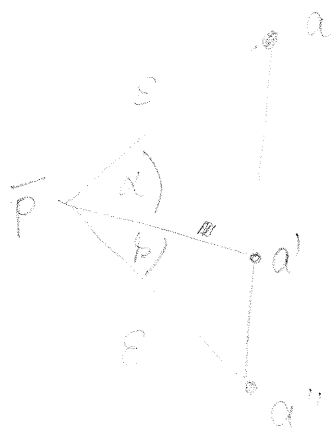
Sei $s := d_{\text{eukl}}(\bar{p}, a')$. Dann gilt

$$\overline{\Delta}_p(\gamma(\varepsilon), \gamma'(\varepsilon)) \stackrel{(1)}{<} \Delta_p(\gamma, \gamma') + \delta < \alpha$$

und somit mit 1.23 $d_x(\gamma(\varepsilon), \gamma'(s)) < d_{\text{eukl}}(a, a')$.

analog mit (2) folgt: $d_x(\gamma'(s), \gamma''(\varepsilon)) < d_{\text{eukl}}(a', a'')$.

und $\beta := \bar{\chi}_P(a', a'') > \bar{\chi}_P(\gamma', \gamma'') + \beta$.



Sei $s = d(\bar{p}, a')$. Dann gilt:

$$\bar{\chi}_P(\gamma'(\epsilon), \gamma'(s)) < \bar{\chi}_P(\gamma', \gamma') + \beta < \dots$$

also

$$d(\gamma'(\epsilon), \gamma'(s)) < d_{\text{eukl}}(a, a')$$

ebenso ist (mit (2)). $d(\gamma'(s), \gamma''(\epsilon)) < d_{\text{eukl}}(a', a'')$

und somit $d(\gamma'(\epsilon), \gamma''(\epsilon)) < d_{\text{eukl}}(a, a') + d_{\text{eukl}}(a', a'')$

$= \bar{\chi}_P(\gamma', \gamma'') \stackrel{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Kugl.} \\ \text{in } X}}{=} d_{\text{eukl}}(a, a'').$

Andererseits gilt: $\bar{\chi}_P(\gamma'(\epsilon), \gamma''(\epsilon)) > \xi$

Also ist $d(\gamma'(\epsilon), \gamma''(\epsilon)) > d_{\text{eukl}}(a, a'')$ $\Downarrow$ □

1.26 Def. Raum der Richtungen

Sei X ein CAT(0) Raum. Wir sagen, dass zwei Geodäten γ, γ' an p (d.h. die in p starten) die gleiche Richtung an p definieren, wenn gilt $\bar{\chi}_P(\gamma, \gamma') = 0$.

(Zeige: (GA): $\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \bar{\chi}_P(\gamma, \gamma') = 0$ definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der p-Richt. in X . die ist reflexiv, symmetrisch, transitiv.)

Dies resultiert in einem met. Raum der Richtungen an p in X , notiert mit $\Sigma_p X$.

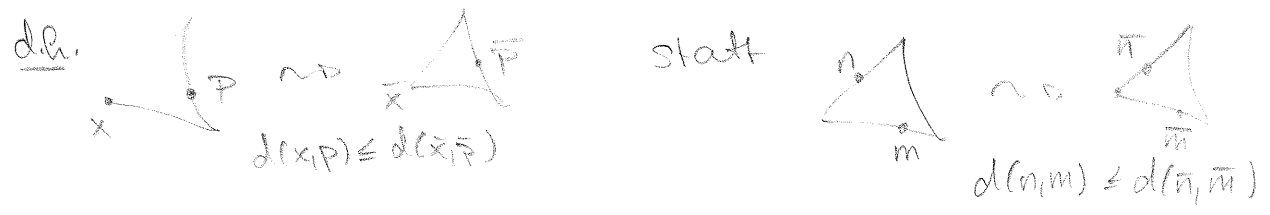
Es gibt folgende Charakterisierung von CAT(0) Räumen:

1.27 Satz (Alexandrov) BH I.1.7

X geod. metr. Raum. Dann sind äquivalent:

- (1) X ist CAT(0)
- (2) $\forall$ geodätischen Dreiecke $\Delta = \Delta(\bar{x}\bar{y}, \bar{y}\bar{z}, \bar{z}\bar{x})$ in X und alle $p \in \bar{y}\bar{z}$ gilt für die Vergleichsplatte $\bar{p}, \bar{x} \in \bar{\Delta} \subset \mathbb{R}^2$:

$$d(p, x) \leq d(\bar{p}, \bar{x}).$$



(3) (vergl. (4) in I.1.7)

ziehe auch BH I.1.2

Der Alexandrov Winkel

Winkel im Vergleichsdreieck

$$\angle^A(c, c') := \limsup_{t, t' \rightarrow 0} \angle(c(t), c'(t'))$$

Zwischen zwei Seiten c, c' eines geodätischen Dreiecks in X ist höchstens so groß wie der Winkel zwischen den entsprechenden Seiten im Vergleichsdreieck in $\mathbb{R}^2$.

ohne Beweis siehe BH I.1.7.



1.28 Def. Für einen metr. Raum (Y, d) definieren wir den flachen Kegel $C_0(Y)$ über Y wie folgt:

Als Menge ist $C_0(Y) = [0, \infty) \times Y / \sim$ wobei
 $(t, y) \sim (t', y')$ wenn $t = t' = 0$.

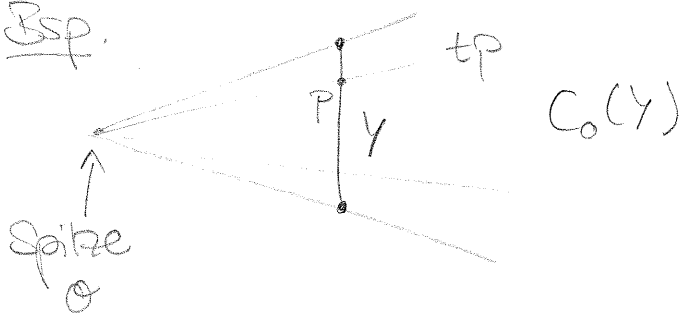
Wir schreiben $\cdot y$ für die Klasse von (t, y) und nennen die Klasse 0 von $(0, y)$ die Spitze des Kegels.

Die Metrik d auf $C_0(Y)$ ist definiert durch:

$$d_\pi(y, y') := \min \{ \pi, d_Y(y, y') \} \text{ und}$$

$$d(\cdot y, \cdot y') = \sqrt{t^2 + (t')^2 - 2tt' \cos(d_\pi(y, y'))}$$

Bsp.



Bem. Es gilt:

$$\left[\begin{array}{l} \bullet d(x, 0) = t \quad \forall x = \cdot y \\ \bullet \text{ für } t, t' > 0 \text{ ist} \\ \quad d(x, x') = t + t' \\ \quad \triangleq d(x, y') \geq \pi. \end{array} \right. \quad \boxed{\text{C}_0(Y)}$$

1.30 Lemma d ist eine Metrik auf $C_0(Y)$.

Beweis: Wir zeigen die Dreiecksungleichung, der Rest ist einfach. Betrachte dazu $x_i = t_i \cdot y_i$ $i=1,2$ im Kegel $C_0(Y)$.

a) Betrachte zuerst den Fall, dass $t_1 = 0$. d.h. ein der Raum t_i ist gleich 0

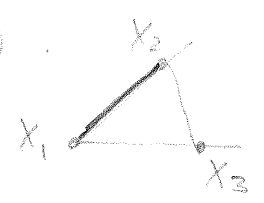
Dann ist

$$d(x_1, x_2) = t_2 \quad \text{und} \quad d(x_1, x_3) = t_3$$

oBdA.

und es gilt

$$\begin{aligned} \bullet \quad d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) &= t_3 + \sqrt{t_2^2 + t_3^2 - 2t_2 t_3 \cos(d_\pi(y_2, y_3))} \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \cos(\cdot) \leq 1}}{\geq} t_3 + \sqrt{(t_2 - t_3)^2} = t_2 = d(x_1, x_2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bullet \quad d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3) &= t_2 + t_3 \\ &\geq \sqrt{t_2^2 + t_3^2 - 2t_2 t_3 \cos(d_\pi(y_2, y_3))} = d(x_2, x_3) \leq 1 \end{aligned}$$

b) Wir nehmen jetzt an, dass $t_i > 0 \quad \forall i=1,2,3$.

Fall 1: $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) < \pi$

Dann gilt mit Δ -Ungl. in Y , dass $d(y_1, y_3) < \pi$.

Betrachte Punkte $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ in $\mathbb{S}^2$ mit $d(y_i, y_j) = d(\bar{y}_i, \bar{y}_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

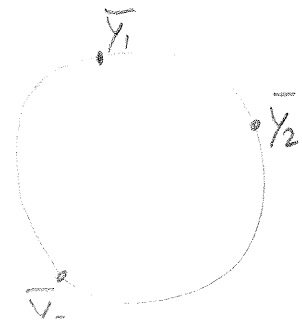
Man kann zeigen, dass der Teilkegel $Co(\{y_1, y_2, y_3\})$ isometrisch ist zum

Teilkegel $Co(\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}) \subset Co(\mathbb{S}^2) = \mathbb{R}^3$.

Mit Δ -Ungl. von $\mathbb{R}^3$ folgt Beh. in diesem Fall

Fall 2: $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) \geq \pi$. (*)

Betrachte Punkte $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ auf $\mathbb{S}^1$ s.d. $d(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = d_\pi(y_1, y_2)$ und $d(\bar{y}_2, \bar{y}_3) = d_\pi(y_2, y_3)$



1. und 2. Fall 1. 20

Identifiziere $C_0 \Phi^1$ mit $\mathbb{R}^2$ und setze

$$\bar{x}_i = t_i \bar{y}_i \text{ für } i=1,2,3.$$

$$\text{Dann gilt: } d(x_1, x_2) = d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$d(x_2, x_3) = d(\bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

$$\text{und } d(x_1, x_3) \leq t_1 + t_3. \quad \left(\begin{array}{l} \text{via } \cos \leq 1 \\ \text{und } -2t_1 t_2 \leq \dots + 2t_1 t_2 \\ \text{weil } t_i > 0 \end{array} \right)$$

Weil (*) gilt folgt mit Alexandrov's Lemma
(BH I.2.16), dass (vgl. Blatt 3)

$$t_1 + t_3 \leq d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + d(\bar{x}_2, \bar{x}_3).$$

$$\text{Also ist } d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3). \quad \square$$

1.29 Satz / Beispiel

$$X_n := C_0 \Phi^{n-1} \text{ ist isometrisch zu } \mathbb{R}^n_{\text{Eukl.}}$$

~~Beweis: Identifiziere den Kegelpunkt / Spitze 0 mit dem Ursprung im $\mathbb{R}^n$ und Φ^{n-1}~~

Beweis: Identifiziere Φ^{n-1} mit $\partial \bar{B}_1(0)$ in $\mathbb{R}^n$ via Isometrie $\iota: \Phi^{n-1} \hookrightarrow \partial \bar{B}_1(0)$.

$$\text{Betrachte } f: X_n \rightarrow \mathbb{R}^n: t y \mapsto t \cdot \iota(y).$$

Die Cosinusregel im $\mathbb{R}^n$ lautet:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

und impliziert, dass f eine Isometrie ist.

mit Def von
Kegelmatrix

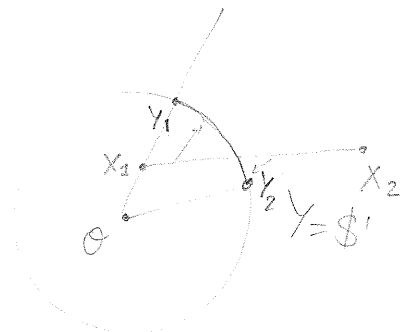
$$\begin{array}{ccc} & b & \\ \swarrow & & \searrow \\ a & & c \end{array}$$

$\square$

1.31 Satz (Geodäten in $C_0 Y$). (BH I.5.10)

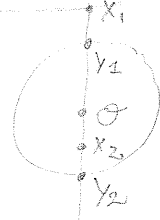
Seien $x_1 = t_1 y_1$ und $x_2 = t_2 y_2$ Punkte in $C_0 Y =: X$.
Dann gilt:

- (1) Ist $t_1, t_2 > 0$ und $d(y_1, y_2) < \pi$ dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der geod. Segmente γ von y_1 nach y_2 in Y und der Menge X_1 nach X_2 in X .



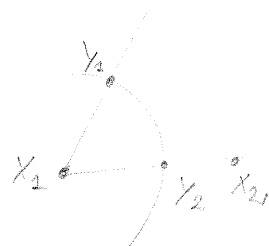
- (2) In den anderen Fällen gibt es ein eindeutiges geodätisches Segment von x_1 nach x_2 .

$$d(y_1, y_2) = \pi :$$



$Y = S^1$
2 geod. Seg.
von y_1 nach y_2

$$t_i = 0 \text{ für ein } i :$$



- (3) Jedes geod. Segment von x_1 nach x_2 ist im abgeschl. Ball um $O \in C_0 Y$ mit Radius $\max\{t_1, t_2\}$ enthalten.

Beweis: (siehe I.5.10 im BH)

- (1) Betrachte zuerst ein geodätisches Segment $\overline{y_1 y_2}$ in Y .

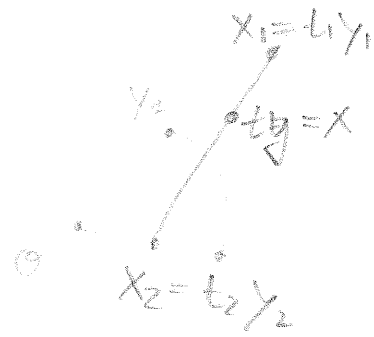
Der Teilkegel $C_0(\overline{y_1 y_2})$ ist isometrisch zu einem Sektor in $\mathbb{R}^2_{\text{eukl.}}$.

(Nach Def der Metrik auf C_0)



Sektoren in $\mathbb{R}^2$ sind konvex $\Rightarrow \exists!$ geod. Segment $X_1 \rightsquigarrow X_2$ enthalten in $\text{Co}(\overline{Y_1 Y_2})$.
 Sei dies das Bild vom $\overline{Y_1 Y_2}$. (klar: dies ist inj. Zuordnung)

Umgekehrt sei $\overline{X_1 X_2} \subset X$ ein geod. Segment von $X_1 = t_1 y_1$ nach $X_2 = t_2 y_2$. Sei $x = ty$ ein bel. Pkt auf $\overline{X_1 X_2}$.



Es ist $t > 0$.
 (Sonst folgt aus Bem. bei Def 1.28. dass $d(y_1, y_2) \geq \pi \Leftrightarrow$)

Damit gilt:

Die Projektion $ty = x \xrightarrow{\text{pr}} y \quad \forall x \in \overline{X_1 X_2}$ ist wohldefiniert.

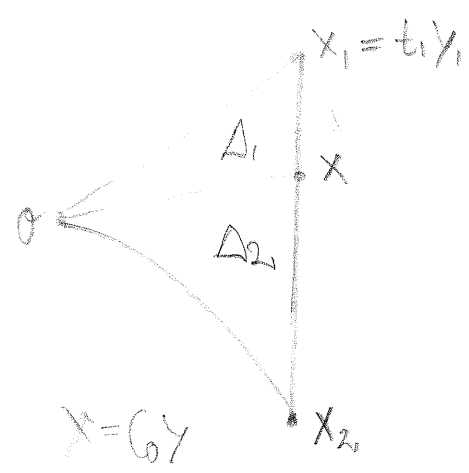
Wir zeigen: $\text{pr}(\overline{X_1 X_2})$ ist geod. Segment von y_1 nach y_2 und somit erhält man $\overline{X_1 X_2}$ als Bild von $\text{pr}(\overline{X_1 X_2})$.

Es genügt z.B., dass $d(y_1, y) + d(y, y_2) = d(y_1, y_2)$

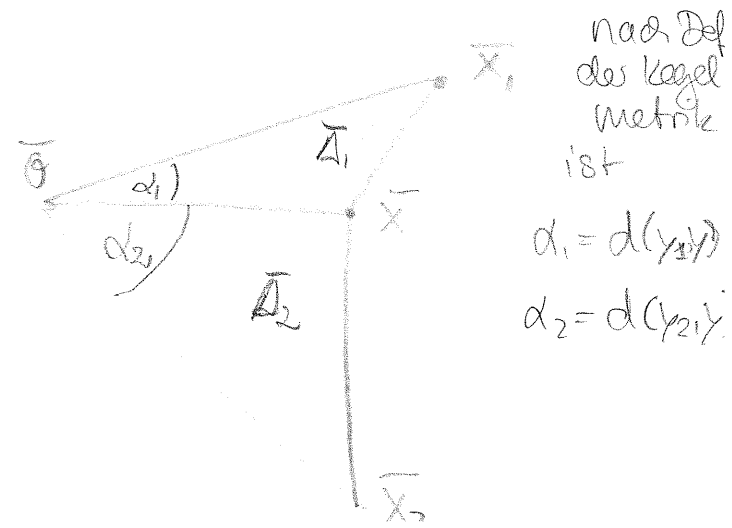
$\forall y$ geg durch $x = ty \in \overline{X_1 X_2}$. (mit LiA über Geodäte aus Mittelpunkten)

(Wir verwenden Vergleichsdreiecke)

Betrachte Dreiecke $\Delta_1 = \Delta(O, x, x_1)$ und $\Delta_2 = \Delta(O, x, x_2)$ und zugehörige Vergleichsdreiecke $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$ mit gem. Kante $\bar{O} \bar{x}$

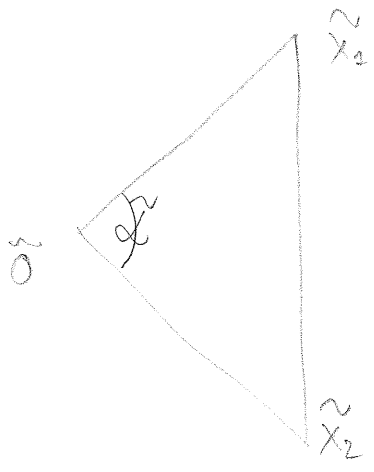


$\mathbb{R}^2$



nach Def der Kugelmetrik ist
 $\alpha_1 = d(y_1, y)$
 $\alpha_2 = d(y, y_2)$

Sei $\tilde{\Delta}$ Vergleichsdreieck von $\Delta = \Delta(x_1, x_2, x_2)$.



dann ist $\tilde{\alpha} = d(y_1, y_2)$.

Außerdem gilt:

$$d(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl. in } \mathbb{R}^2}}{d(\bar{x}_1, \bar{x})} + d(\bar{x}, \bar{x}_2) = d(x_1, x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{\Delta}\text{-Vergl.dreieck}}}{=} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$$

Das Cosinussgesetz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$



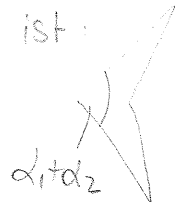
liefert $d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)^2 \leq d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^2$

$$d(\bar{o}_1, \bar{x}_1)^2 + d(\bar{o}_1, \bar{x}_2)^2 - 2 \cos(d_1 + d_2) \leq d(\tilde{o}_1, \tilde{x}_1)^2 + d(\tilde{o}_1, \tilde{x}_2)^2 - 2 \cos(\tilde{\alpha})$$

$$\Rightarrow -\cos(d_1 + d_2) \leq -\cos(\tilde{\alpha})$$

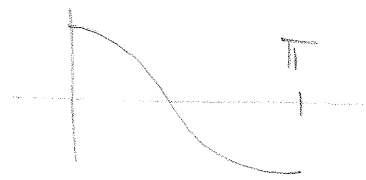
$\swarrow < \pi$ $\uparrow < \pi$ nach Ann.

$\frac{d_1}{\parallel}$ $\frac{d_2}{\parallel}$

weil $d(\bar{x}_1, \bar{x}) + d(\bar{x}_2, \bar{x}) = d(x_1, x_2) \leq \sqrt{(t_1 + t_2)^2} = d(\bar{o}_1, \bar{x}_1) + d(\bar{o}_1, \bar{x}_2)$
das ist:  das richtige Bild und $\alpha_1 + \alpha_2 < \pi$.
 $\cos(d_\pi(y, y')) > \cos \pi = -1$

$$\Rightarrow \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \geq \cos(\tilde{\alpha}) \Rightarrow d(y_1, y) + d(y, y_2) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\leq \tilde{\alpha} = d(y_1, y_2)$$



Zweite Richtung " $\geq$ " folgt mit Δ -Ungl. auf Y . $\square(1)$

Bew (2): Die restl. Fälle sind: a) $d(y_1, y_2) \geq \pi$ und mit $t_1, t_2 > 0$

b) $t_i = 0$ für ein i .

Beide Fälle gilt $d(x_1, x_2) = t_1 + t_2$ und der Pfad

$$c: [0, t_1 + t_2] \rightarrow X : t \mapsto \begin{cases} (t_1 - t)y_1 & t \in [0, t_1] \\ (t - t_1)y_2 & t \in [t_1, t_1 + t_2] \end{cases}$$

Ist ein geod. Pfad von x_1 nach x_2 . (nachrechnen)
UA

Bleibt z.z. dieser ist eindeutig.

~~Im Falle, dass $t_1 = 0$ oder $t_2 = 0$ ist dies einfach zu sehen. (UA)~~

Wir betrachten den Fall ^{a)} $t_1, t_2 > 0$ und $d(y_1, y_2) \geq \pi$.

Es reicht z.z. falls für ein $x = ty$ gilt

$$(*) \quad d(x_1, x) + d(x, x_2) = d(x_1, x_2) \quad \text{dann}$$

bedeutet
 $x \in \text{Geodäte}$
von x_1 nach x_2

ist $y = y_1$ oder $y = y_2$.

Konstruiere kongressdrieecke $\bar{\Delta}_1$ und $\bar{\Delta}_2$ in $\mathbb{R}^2$ von
von $\Delta(\bar{o}, x_1, x_2)$ von $\Delta(\bar{o}, x_1, x_2)$



(wie im Bew. von (1).)

Die Winkel an $\bar{o}$ in $\bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2$ sind $d_\pi(y_1, y_2)$ bzw. $d_\pi(y_1, y_2)$.

und mit Δ -Ungl. in γ gilt: $d_\pi(y_1, y_2) + d_\pi(y_1, y_2) \geq \pi$.
($\geq d_\pi(y_2, y_2) \geq \pi$).

Es gilt aber

$$\underbrace{d(\bar{x}_1, \bar{o})}_{= d(x_1, o)} + \underbrace{d(\bar{o}, \bar{x}_2)}_{= d(o, x_2)} = d(x_1, x_2) = \underbrace{d(\bar{x}_1, \bar{x})}_{(*) \quad d(x_1, x)} + \underbrace{d(\bar{x}_2, \bar{x})}_{d(x_2, x)}$$

$\Rightarrow \bar{\Delta}_1$ und $\bar{\Delta}_2$ sind degeneriert und die Beh. folgt.

Fall b) folgt analog.

(mit $\bar{x}$ liegt auf $\bar{x}_1, \bar{x}_2$) $\square$

(3) Beh. ist klar wenn wir im Fall (2) sind.
(vergl. Formel für eind. Geodäte).

Ann.: $t_1, t_2 > 0$ und $d(\gamma_1, \gamma_2) < \pi$. (Fall (1))

In diesem Fall liegt jede Geodäte $x_1 \leadsto x_2$ in einem Teilkegel $G(\overline{\gamma_1 \gamma_2})$ in G der isometrisch zu einem Kegel in $\mathbb{R}^2$ ist. Weil Bälle im $\mathbb{R}^2$ konvex sind folgt $\overline{x_1 x_2} \subset \overline{B_{\max\{t_i\}}(o)} \cap G(\overline{\gamma_1 \gamma_2})$
 $\subset B_{\max\{t_i\}}(o)$.

$\Rightarrow$ Beh.

□
Ende 3(10)

Ziel ist es Krümmungsverhalten von γ und $G(\gamma)$ zu vergleichen um später Räume auf $G\mathcal{H}(o)$ zu testen.

Def. 1.32 **Modellräume** (für konstante ^{Schnitt-}Krümmung K):

Sei $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{R}$, dann bezeichnen wir mit

M_K^n folgende metr. Räume: (vollst. Riem. Mfkt des dim=2 und konstanter Schnittkrümmung K)

$K=0$: $M_0^n = E^n = \mathbb{R}^n_{\text{eukl.}}$

$K>0$: $M_K^n = \text{Sphäre } S^n \text{ mit Metrik skaliert mit } 1/\sqrt{K}$ (Ball mit Radius K)

$K<0$: $M_K^n = H^n$ hyp. Raum mit Metrik skaliert mit $1/\sqrt{-K}$

Bem.

für uns sind $K=0$ und $K=1$ wichtig.

Def. 1.33 CAT(K) Eigenschaft

Ist definiert analog zur CAT(0) Eigenschaft.

Ein geodätischer Raum ist CAT(K) wenn alle seine Dreiecke mit Umfang $< 2D_K$ dünner sind als ihre Vergleichsdreiecke in $\mathbb{R}_K^2$.

$$\begin{aligned} \text{Es ist } D_K &= \text{Durchmesser von } \mathbb{R}_K^2 \\ &= \begin{cases} \infty & \text{für } K \leq 0 \\ \pi/\sqrt{K} & \text{für } K > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und 1.27

Bem 1) (iA) Sätze 1.8 und 1.12 ^{und 1.27} gelten (mit leichtem Zusatzann. an Dreiecksumfang) auch für CAT(K) Räume.

1.17 gilt auch für CAT(K) mit $K \leq 0$.

2) Man kann auch $C_K(Y)$ K -Kegel definieren

$$\text{mit } C_K Y = [0, \infty) \times Y / \sim \quad \text{für } K \leq 0$$

$$C_K Y = [0, D_K/2] \times Y / \sim \quad \text{für } K > 0.$$

und Metriken implizit gegeben durch

$$\begin{aligned} K < 0: & \cosh(\sqrt{-K} d(x, x')) \\ &= \cosh(\sqrt{-K} t) \cosh(\sqrt{-K} t') - \\ & \quad \sinh(\sqrt{-K} t) \sinh(\sqrt{-K} t') \cos(d_\pi(y, y')). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= ty \\ x' &= t'y' \end{aligned}$$

$$K > 0: d(x, x') \leq D_K \text{ und}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\sqrt{K} d(x, x')) \\ &= \cos(\sqrt{K} t) \cos(\sqrt{K} t') \\ & \quad + \sin(\sqrt{K} t) \sin(\sqrt{K} t') \cos(d_\pi(y, y')). \end{aligned}$$

$K = 0$ siehe Def. 1.28.

1.34 Satz von Berestovskii (1983)

28hg
zw. CAT(1) &
CAT(K)

Sei Y ein metrischer Raum.

Dann gilt:

$X := G_K Y$ ist $CAT(K) \Leftrightarrow Y$ ist $CAT(1)$.

Wir beweisen den Fall des flachen Kegels $X = G_0 Y$

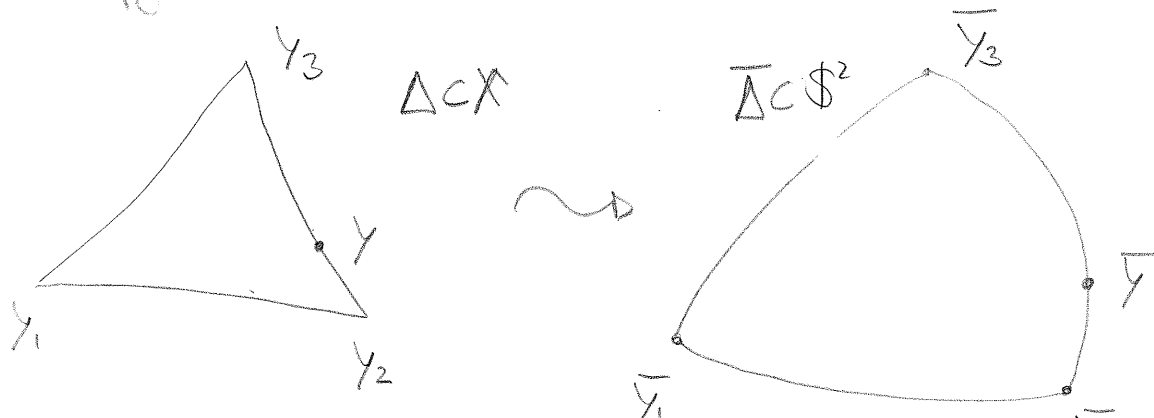
Beweis (für $K=0$): (folgt aus Beweis 1.31 (ii))

" $\Rightarrow$ " Ann. X ist $CAT(0)$.

Geodäten in X sind eindeutig, also sind $\forall y_1, y_2 \in Y$ mit $d(y_1, y_2) < \pi$ geod. in Y eindeutig nach 1.31 (i).
Also sind Dreiecke durch ihre Ecken eind. bestimmt. (Bijektion zw. geod.

Wir müssen zeigen: Dreiecke mit Umfang $< 2\pi$ sind dünner als ihre Vergl. ds. in $\mathbb{S}^2$.

Sei $\Delta = \Delta(y_1, y_2, y_3, \overline{y_1 y_2}, \overline{y_2 y_3}, \overline{y_3 y_1})$ ein Dreieck in Y mit Umfang $< 2\pi$ und sei $\overline{\Delta} = \Delta(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$ Vergleichsdreieck in $\mathbb{S}^2$.



Sei $y \in \overline{y_2 y_3}$ und $\overline{y}$ Vergl. pt auf $\overline{\Delta}$.

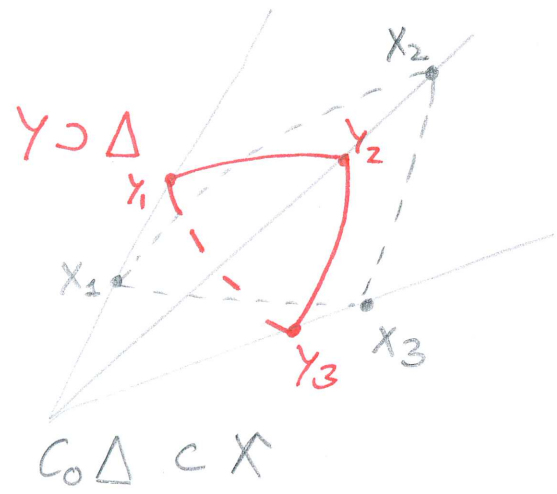
Wähle $\varepsilon > 0$ und betrachte Dreieck $\Delta_\varepsilon = \Delta(x_1, x_2, x_3)$ mit $x_i := \varepsilon \cdot y_i$ in X .

Mit 1.29 ist $G_0 \overline{\Delta}$ Kegel in $G_0 \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^3$ und die

Punkte $\overline{x}_i := \varepsilon \cdot \overline{y}_i$ Vergleichsdreieck $\overline{\Delta}_\varepsilon$ für Δ_ε .
 bilden ein euklidisches

(a) Sei $\Delta = \Delta(\overline{y_1 y_2}, \overline{y_2 y_3}, \overline{y_3 y_1})$ Dreieck in Y
und sei $\bar{\Delta}$ Vergl.dreieck von Δ in $\mathbb{S}^2$ mit Ecken $\bar{y}_i$.

Die Abb $\bar{\Delta} \rightarrow \Delta: \bar{y} \mapsto y$ erweitert zu
einer Bijektion von $C_0 \bar{\Delta} \xrightarrow{\quad} C_0 \Delta \subset X$
 $\uparrow$
 $\mathbb{R}^3 = C_0 \mathbb{S}^2$



Beobachtung:
Das Dreieck $\Delta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$
mit $\bar{x}_i := t_i \bar{y}_i$ ist
Vergleichsdreieck von
 $\Delta(x_1, x_2, x_3)$.

Es gilt daher für bel. x auf $\bar{x}_2 \bar{x}_3$:

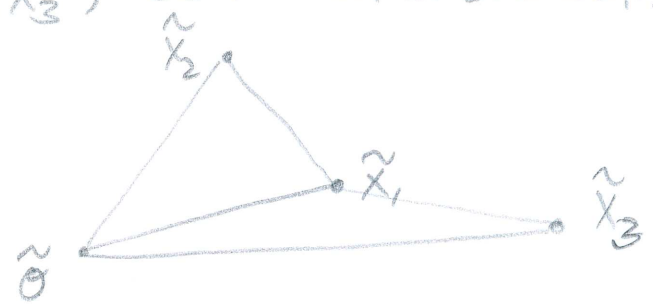
$$d(x_1, x) = \sqrt{t_1^2 + t^2 - 2t_1 t \cos(d_\pi(y_1, y))}$$

$\uparrow$ bel. Punkt auf $\bar{x}_2 \bar{x}_3$ $x = t\bar{y}$
 $\leq$
 $\uparrow$ CAT(1) Bed. für Y
 $\sqrt{\dots d_\pi(\bar{y}_1, \bar{y})}$
 $\uparrow$ Vergleichspkt von y in $\bar{\Delta}$
 $\downarrow$ $t \cdot \bar{y}$
 $\downarrow$ $d(x_1, \bar{x})$

Eukl. Metrik

somit gilt die CAT(0) Eigenschaft
für $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ mit Satz 1.27.

(b) Betrachte Vergleichsdreiecke in $\mathbb{R}^2$
 $\Delta(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ und $\Delta(\tilde{0}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3)$ von $\Delta(0, x_1, x_2)$ & $\Delta(0, x_1, x_3)$
s.d. $\tilde{x}_2$ und $\tilde{x}_3$ auf versch.
Seiten von $\tilde{0}\tilde{x}_1$ liegen:



Mit der Definition der Kugelmetrik folgt:
auf $\mathbb{C}_0$

-35-

$$\angle_{\tilde{O}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(y_1, y_2) \quad \text{und} \quad \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{O}, \tilde{x}_2) = \angle_{x_1}(O, x_2)$$

$$\angle_{\tilde{O}}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = d(y_1, y_3) \quad \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{O}, \tilde{x}_3) = \angle_{x_1}(O, x_3)$$

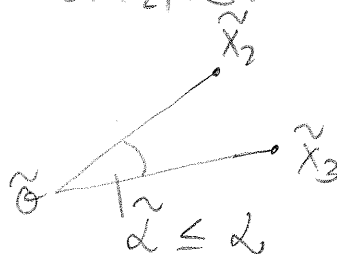
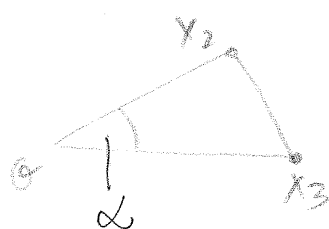
(nach Ann ist $d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) > \pi$.)

$$\Rightarrow \angle_{\tilde{O}}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = 2\pi - \angle_{\tilde{O}}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1) - \angle_{\tilde{O}}(\tilde{x}_3, \tilde{x}_1)$$

$$\stackrel{\tilde{\alpha} :=}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } \mathbb{R}^2}}{=} 2\pi - (d(y_1, y_2) + d(y_1, y_3))$$

$$\text{mit Ann} \longrightarrow \leq d(y_2, y_3) = \angle_O(x_2, x_3) =: \alpha$$

Somit ist $d(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \leq d(x_2, x_3)$.



! Das ist nicht das
Vergl. dr. von
 $\Delta(O, x_2, x_3)$.

In einem Vergleichsdr. $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ in $\mathbb{R}^2$
für das Dr. $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ gilt somit

$$\angle_{\bar{x}_1}(\bar{x}_2, \bar{x}_3) \geq \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{x}_2, \tilde{O}) + \angle_{\tilde{x}_1}(\tilde{O}, \tilde{x}_3)$$

$\uparrow$
weil Vergl. dr. und γ affin

$$= \angle_{x_1}(O, x_2) + \angle_{x_1}(O, x_3)$$

$$\geq \angle_{x_1}(x_2, x_3).$$

Mit 1.27 (3) folgt Behauptung.

bleibt (c): Ein Abst. $d(y_i, y_j)$ ist $\geq \pi$.

-36-

Sei oBdA $d(y_1, y_3) \geq \pi$. z.z. $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ erfüllt (ATC).

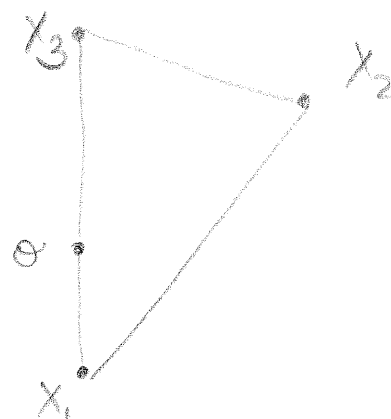
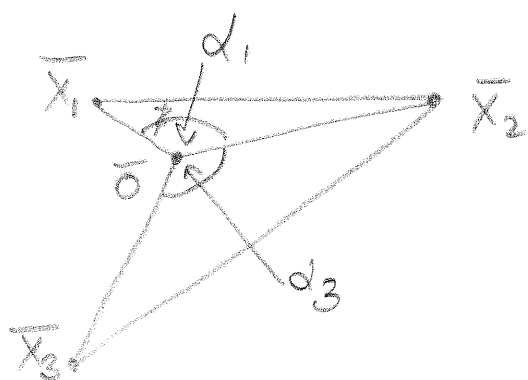
Dann ist das geodätische Segment $\overline{x_1 x_3}$ die Verkettung der Segmente $\overline{x_1 o}$ und $\overline{o x_3}$ nach Satz 1.31.

Betrachte Vergleichsdreiecke in $\mathbb{R}^2$:

$\bar{\Delta}_1 = \Delta(\bar{o}, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ von $\Delta_1 = \Delta(o, x_1, x_2)$ und

$\bar{\Delta}_3 = \Delta(\bar{o}, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ von $\Delta_3 = \Delta(o, x_2, x_3)$.

Wähle $\bar{\Delta}_1$ und $\bar{\Delta}_3$ so, dass $\bar{x}_1, \bar{x}_3$ auf versch. Seiten von $\overline{\bar{o} \bar{x}_2}$ liegen:



$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \alpha_1 + \alpha_3 &= \angle_{\bar{o}}(\bar{x}_2, \bar{x}_1) + \angle_{\bar{o}}(\bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ &= d_{\pi}(y_1, y_2) + d_{\pi}(y_2, y_3) \geq \pi. \\ &\quad \geq d_{\pi}(y_1, y_3) = \pi \end{aligned}$$

Betrachten wir ein Vergleichsdreieck $\tilde{\Delta}$ für $\Delta = \Delta(x_1, x_2, x_3)$ so liefert Alexandrov's Lemma, dass die restl. Winkel in $\bar{\Delta}_1$ und $\bar{\Delta}_2$ nicht kleiner werden.

$\Rightarrow$ mit 1.27 (3) die Beh.

Für (a)-(c) folgt (ATC) Bedingung für X $\square$

1.35 Def.

Der flache Kegel über dem Raum der Richtungen an einem Punkt $p \in X$ heißt Tangentialkegel an p .

Schreibe $T_p X := C_0(\Sigma_p X)$.

Bem. Ist X Riem. Mfkt so ist $T_p X$ der Tangentialraum an X .

1.36 Satz Sei X ein metrisches Raum, der

lokal CAT(K) ist für ein $K \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Die Vollständigung von $\Sigma_p X$ ist CAT(1) $\forall p$
- Die — — — von $T_p X$ ist CAT(0) $\forall p$.

Beweis Idee: Es genügt z.z. $T_p X$ ist CAT(0) nach S.V. Borestovskii.

Mit UA reicht es sogar z.z., dass die CAT(0) Bed. lokal um die Kegelspitze erfüllt ist.

Man zeigt dann, dass es

- es ungefähre Mittelpunkte gibt
- und • die CAT(0) 4-Punkt Bedingung erfüllt ist

"□"

1.37 Def.

Ein metrisches Raum X hat ^{ungefähre} Mittelpunkte,

wenn es für alle $x, y \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit

$$d(x, m), d(y, m) \leq \frac{1}{2} d(x, y) + \varepsilon.$$

Wir sagen X erfüllt die CAT(0) 4-Punkt

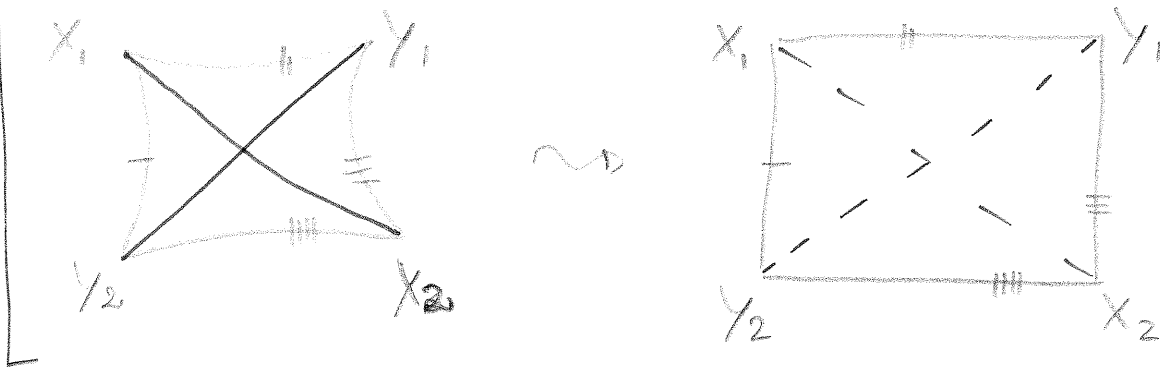
Bedingung wenn es für alle 4-Tupel

$x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ stets $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2$ in $\mathbb{R}^2$ gibt

mit $d(x_i, y_j) = d(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$

$$d(x_1, x_2) \leq d(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

$$d(y_1, y_2) \leq d(\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$



Damit lassen sich CAT(0) Räume charakterisieren
Vergleiche Übungen.