

Inhaltsverzeichnis

1	Hilberträume und die unitäre Gruppe	2
2	Kazhdan's Eigenschaft (T)	3
2.1	Definition der Eigenschaft (T)	4
3	Die Haagerup Eigenschaft	5
4	Anhang	7

1 Hilberträume und die unitäre Gruppe

Erinnerung (Skalarprodukt)

Ein Skalarprodukt $\langle \cdot \rangle$ auf einem $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathbf{X}$ ist eine Abbildung

$$\langle \cdot \rangle : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle, \forall v_i, w \in \mathbf{X}, \lambda_i \in \mathbb{C} \ i = 1, 2$
- $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}, \quad \forall v, w \in \mathbf{X}$
- $\langle v, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathbf{X} \quad \text{und} \quad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Wir nennen das Tupel $(\mathbf{X}, \langle \cdot \rangle)$ einen Prä-Hilbertraum. Weiterhin wird durch das Skalarprodukt eine Norm induziert, nämlich $\| \cdot \| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Durch die Norm kann $\mathbf{X}$ in natürlicher Weise als metrischer bzw. topologischer Raum aufgefasst werden, indem wir $\mathbf{X}$ mit der von $\| \cdot \|$ induzierten Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ und der von d induzierten Topologie T versehen.

Eine Basis der Topologie ist dann durch $\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) | x \in \mathbf{X}, \varepsilon > 0\}$ gegeben.

Definition 1.1 (Hilbertraum)

Sei $(\mathbf{X}, \langle \cdot \rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Ist nun $(\mathbf{X}, d)$ ein vollständiger Vektorraum, so heißt $(\mathbf{X}, \langle \cdot \rangle)$ Hilbertraum.

Dabei sei d die vom Skalarprodukt induzierte Metrik.

Bemerkung

Hilberträume sind $\text{Cat}(0)$

Im folgenden sei $\mathcal{H}$ stets ein Hilbertraum.

Konvention

Seien $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ $\mathbb{C}$ -Vektorräume.

$\mathcal{U} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sei eine lineare Abbildung.

Wir werden anstatt $\mathcal{U}(v)$ auch $\mathcal{U}v, v \in \mathcal{H}$ schreiben, wenn aus dem Kontext klar ist, dass $\mathcal{U}$ eine lin. Abbildung definiert.

Definition 1.2 (Unitäre Gruppe)

Wir definieren die unitäre Gruppe des Hilbertraums $\mathcal{H}$, wie folgt:

$$\mathfrak{U}(\mathcal{H}) := \{ \mathcal{U} \in \text{Aut}(\mathcal{H}) | \langle \mathcal{U}v, \mathcal{U}w \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in \mathcal{H} \}$$

Insbesondere ist also $\mathcal{U} \in \mathfrak{U}(\mathcal{H})$ eine Isometrie.

Um Kazhdan's Eigenschaft (T) definieren zu können sind noch weitere wichtige Definitionen notwendig, welche im nächsten Abschnitt bereit gestellt werden sollen.

2 Kazhdan's Eigenschaft (T)

Definition 2.1 (Topologische Gruppe)

Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe und sei T eine Topologie auf $\mathbf{G}$. Sei weiter die Gruppenverknüpfung $\circ : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ stetig.

Selbiges gelte für die Inversion

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G}. \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

Dann nennen wir das Tripel $(\mathbf{G}, \circ, T)$ eine topologische Gruppe

Beispiel

Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe. Versehen wir $\mathbf{G}$ mit der diskreten Topologie $T_{\text{disk.}} := \mathcal{P}(\mathbf{G})$ so ist $\mathbf{G}$ eine topologische Gruppe, denn das Urbild jeder Menge ist offen in $\mathbf{G}$ bzw in $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$, da jede Menge offen bzgl $T_{\text{disk.}}$ ist.

Definition 2.2 (Unitäre Darstellung)

Sei $\mathbf{G}$ eine topologische Gruppe.

Eine unitäre Darstellung von $\mathbf{G}$ auf $\mathcal{H}$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$\pi : \mathbf{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, welcher stark stetig ist, das heißt:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\rightarrow \mathcal{H} \\ g &\rightarrow \pi(g)v \end{aligned}$$

ist für alle $v \in \mathcal{H}$ stetig.

Wir schreiben für eine solche Darstellung von $\mathbf{G}$ auf $\mathcal{H}$: $\mathcal{H}_\pi$

Definition 2.3 (verschiedene Invarianzen)

Gegeben sei eine unitäre Darstellung $\mathcal{H}_\pi$.

1. Für eine Teilmenge $\mathbf{Q} \subset \mathbf{G}$ und ein $\varepsilon > 0$ nennen wir einen Vektor $v \in \mathcal{H}$ $v \neq 0$, $(\mathbf{Q}, \varepsilon)$ - invariant, falls folgendes erfüllt ist:

$$\sup_{g \in \mathbf{Q}} \|\pi(g)v - v\| < \varepsilon \|v\|$$

2. $\mathcal{H}_\pi$ hat nicht null invariante Vektoren, falls:

$$\exists v \neq 0 \in \mathcal{H} \text{ mit: } \pi(g)v = v \quad \forall g \in \mathbf{G}$$

Wir können nun die erste Definition von Khazdan's Eigenschaft (T) formulieren:

2.1 Definition der Eigenschaft (T)

Definition 2.1.1 Sei $\mathbf{G}$ eine topologische Gruppe.

Eine Teilmenge $\mathbf{Q} \subset \mathbf{G}$ heißt Kazhdan Menge, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit der folgenden Eigenschaft:

Jede unitäre Darstellung $\mathcal{H}_\pi$ von $\mathbf{G}$, welche $(\mathbf{Q}, \varepsilon)$ -invariante Vektoren besitzt, hat ebenfalls nicht null invariante Vektoren.

In diesem Fall heißt ε Kazhdan Konstante von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{Q}$, und $(\mathbf{Q}, \varepsilon)$ heißt Kazhdan Paar für $\mathbf{G}$.

$\mathbf{G}$ hat Kazhdan's Eigenschaft (T), falls $\mathbf{G}$ eine kompakte Kazhdan Menge $\mathbf{Q} \neq \emptyset$ besitzt.

Satz 2.1.2:

Jede Topologische Gruppe $\mathbf{G}$ besitzt ein Kazhdan-Paar im Sinne der obigen Definition: nämlich $(\mathbf{G}, \sqrt{2})$

Hilfssatz 2.1.2.1

Sei $\mathcal{H}_\pi$ eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathbf{G}$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, sei weiter $v \in \mathcal{H}$ und sei $\mathcal{C}$ die konvexe Hülle der Gruppe $\pi(\mathbf{G})v$. Dann ist $\mathcal{C}$ $\pi(\mathbf{G})$ -invariant.

Beweis

Es gilt: $\mathcal{C} := \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : x_i \in \pi(\mathbf{G})v, n \in \mathbb{N}, \sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i > 0\}$

Wir müssen nun zeigen: $\forall g \in \mathbf{G}$ und $\forall c \in \mathcal{C}$ gilt: $\pi(g)c \in \mathcal{C}$.

Dies rechnet man nach: Sei also $g \in \mathbf{G}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \pi(g)c &= \pi(g) \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(g_i)v \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \pi(g_i \cdot g)v \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass π ein Homomorphismus ist. $\square$

Bemerkung

Diese Aussage gilt auch für abgeschlossene konvexe Hüllen $\overline{\mathcal{C}}$. Hierzu fassen wir den Abschluss als die Menge aller Grenzwerte von Folgen mit Gliedern in $\mathcal{C}$ auf. Es folgt: $\pi(g)c_n \in \mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}} \forall n \in \mathbb{N}$. Damit wird eine neue Folge $\pi(g)c_n$ definiert, deren Grenzwert somit in $\overline{\mathcal{C}}$ liegt (sofern sie konvergiert). Also: $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(g)c_n \in \overline{\mathcal{C}}$ da $\pi(g)$ eine Isometrie definiert folgt, dass dann auch $\pi(g)c \in \overline{\mathcal{C}}$ gilt, für $c := \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(g)c_n$.

Beweis des Satzes

Angenommen, es existiert ein Vektor v , welcher $(\mathbf{G}, \sqrt{2})$ -invariant ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass v normiert ist, also dass folgende Ungleichung gelte:

$$\sup_{x \in \mathbf{G}} \|\pi(x)v - v\| < \sqrt{2}$$

Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{H}_\pi$ mindestens einen nicht-null invarianten Vektor besitzt. Dazu betrachten wir die abgeschlossene konvexe Hülle $\overline{\mathcal{C}}$ der Teilmenge $\pi(\mathbf{G})v$ von $\mathcal{H}$, und das (eindeutige) Element mit minimaler Norm in $\overline{\mathcal{C}}$ (die Existenz und Eindeutigkeit wird im Anhang bewiesen!):

$$\|c_0\| = \min\{\|c\| : c \in \mathcal{C}\}$$

Die $\pi(\mathbf{G})$ -Invarianz von $\overline{\mathcal{C}}$ liefert die Invarianz von c_0 (da $\pi(\mathbf{g})$, $\forall g \in \mathbf{G}$ eine Isometrie definiert, und das Minimum eindeutig ist).

Es muss gezeigt werden, dass $c_0 \neq 0$ gilt:

Setze $\varepsilon := \sqrt{2} - \sup_{x \in \mathbf{G}} \|\pi(x)v - v\| > 0$. Nun gilt für alle $x \in \mathbf{G}$:

$$2 - 2 \cdot \operatorname{Re}(\langle \pi(x)v, v \rangle) = \|\pi(x)v - v\|^2 \leq (\sqrt{2} - \varepsilon)^2$$

$$\text{Da } \operatorname{Re}(\langle \pi(x)v, v \rangle) \geq \frac{2 - (\sqrt{2} - \varepsilon)^2}{2} = \frac{\varepsilon(2\sqrt{2} - \varepsilon)}{2} > 0 \text{ gilt, folgt:}$$

$$\operatorname{Re}\langle c, v \rangle > 0, \forall c \in \overline{\mathcal{C}}. \text{ Insbesondere also für } c_0$$

Damit ist alles gezeigt. $\square$

Folgerung

Kompakte Gruppen haben Kazhdans Eigenschaft (T).

Beweis

Nach dem Satz ist klar, dass jede topologische Gruppe $\mathbf{G}$ ein Kazhdan Paar besitzt. Ist $\mathbf{G}$ nun kompakt, so ist die Gruppe selbst die gesuchte kompakte Kazhdan-Menge. $\square$

Insbesondere haben endliche Gruppen Kazhdan's Eigenschaft (T).

Hierzu versehen wir $\mathbf{G}$ mit der diskreten Topologie $\mathcal{P}(\mathbf{G})$, da $\mathbf{G}$ endlich ist, ist $(\mathbf{G}, \mathcal{P}(\mathbf{G}))$ kompakt.

Ein Beispiel für eine unendliche Gruppe mit der Eigenschaft (T) ist die Gruppe $SL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$. Auf den Beweis sei hier verzichtet (dieser erfordert viel Vorarbeit und Hintergrundwissen zu der Gruppe) und auf das Buch „Kazhdan's Property (T)“ von Beeka, Harpe und Valette §1.4 verwiesen.

3 Die Haagerup Eigenschaft

Definition 3.1

Wir definieren den Kern einer Menge $\mathbf{X}$ als eine symmetrische Abbildung $\psi : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \mapsto \mathbb{R}_+$, für welche $\overline{\psi(x, x)} = 0$ gilt.

Beispiel: Eine Metrik d auf $\mathbf{X}$ ist ein Kern von $\mathbf{X}$

Definition 3.2

Sei ψ ein Kern von $\mathbf{X}$. ψ heißt bedingt negativ definit, falls:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in \mathbf{X}, \text{ und } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ mit } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$$

$$\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \psi(x_j, x_i) \leq 0 \text{ gilt.}$$

Beispiel: Sei T ein Baum. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi : T \times T &\mapsto \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

Ein Kern im Sinne von 3.2, wie in Phil's Vortrag gezeigt wird.

Wir sagen weiter, dass ψ links invariant ist, falls:

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(hx_1, hx_2) \forall h, x_1, x_2 \in \mathbf{X} \text{ erfüllt ist.}$$

Definition/ Theorem 3.3

Sei im Folgenden $(\mathbf{G}, \circ, T)$ eine lokalkompakte topologische Gruppe, deren Topologie T das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

1. $\mathbf{G}$ besitzt Kazhdan's Eigenschaft (T) genau dann, wenn jeder stetige, links invariante, bedingt negativ definite Kern von $\mathbf{G}$ beschränkt ist.
2. $\mathbf{G}$ besitzt die Haagerup Eigenschaft genau dann, wenn ein stetiger, links invarianter, bedingt negativ definiter Kern ψ von $\mathbf{G}$ existiert, unter welchem Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Für den Beweis von 1. sei hier auf „Advances in Mathematics 225 (2010)“ 6.20 von I.Chatterji verwiesen. (Auf der Homepage des Seminars zu finden)

Korollar 3.4

Kompakte Gruppen besitzen die Haagerup Eigenschaft.

Beweis

Wähle ψ wie folgt:

$$\begin{aligned}\psi : \mathbf{G} \times \mathbf{G} &\mapsto \mathbb{R}_+ \\ (g_1, g_2) &\mapsto 0\end{aligned}$$

ψ ist offenbar stetig und erfüllt alle geforderten Eigenschaften (Urbilder kompakter Mengen sind entweder $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ oder die leere Menge, da $\mathbf{G}$ kompakt ist, ist aber auch $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ bzgl der induzierten Produkttopologie kompakt) $\square$

Satz 3.5

Eine Topologische Gruppe $\mathbf{G}$ ist kompakt, genau dann wenn sie sowohl Kazhdan's Eigenschaft (t) als auch die Haagerup Eigenschaft besitzt.

Beweis

Nach obigen Überlegungen ist klar, dass eine kompakte Gruppe beide Eigenschaften besitzt.

Sei also $\mathbf{G}$ eine topologische Gruppe welche die Haagerup Eigenschaft und Kazhdan's Eigenschaft (T) besitzt.

Nach 3.3 ist nun jeder links invariante, bedingt negativ definite Kern von $\mathbf{G}$ beschränkt. Es folgt:

$$\psi(\mathbf{G} \times \mathbf{G}) \subseteq [a, b] \subset \mathbb{R}_+$$

Da $\mathbf{G}$ die Haagerup Eigenschaft besitzt, folgt weiter, dass wir ψ derart wählen können, dass das Urbild von $[a, b]$ kompakt ist. Also:

$$\psi^{-1}([a, b]) \supseteq \mathbf{G} \times \mathbf{G}$$

es muss insbesondere Gleichheit gelten. Da aber $[a, b]$ kompakt ist, ist dann auch $\mathbf{G} \times \mathbf{G}$ kompakt und damit auch $\mathbf{G}$. $\square$

4 Anhang

Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{H}$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Dann existiert genau ein $c_0 \in \overline{\mathcal{C}}$ mit $\|c_0\| = \inf_{c \in \overline{\mathcal{C}}} \|c\|$. (Insbesondere wird also das Infimum angenommen, und damit das Minimum erklärt)

Beweis

Zur Existenz:

Sei $\delta := \inf_{c \in \overline{\mathcal{C}}} \|c\|$. Wir definieren eine Folge (c_n) in $\overline{\mathcal{C}}$ derart, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n\| = \delta$ gelte (die Konvergenz in $\mathbb{R}$ wird durch die Stetigkeit des Skalarproduktes gewährleistet). Nach der Parallelogrammgleichung gilt:

$$\delta^2 \leq \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 \leq \left\| \frac{c_n + c_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{c_n - c_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|c_n\|^2 + \frac{1}{2} \|c_m\|^2 \rightarrow \delta^2.$$

Folglich definiert (c_n) eine Cauchyfolge, welche in $\mathcal{H}$ konvergiert, und da $\overline{\mathcal{C}}$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert in $\overline{\mathcal{C}}$.

Es gilt also insbesondere $\|c_0\| = \delta$.

Zur Eindeutigkeit:

Angenommen, es gibt $c_1, c_2 \in \overline{\mathcal{C}}$ mit der gewünschten Eigenschaft. Es folgt (wieder mittels Parallelogrammgleichung):

$$\delta^2 \leq \left\| \frac{c_1 + c_2}{2} \right\|^2 \leq \left\| \frac{c_1 + c_2}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|c_1\|^2 + \frac{1}{2} \|c_2\|^2 \leq \delta^2.$$

Es muss in jeder Ungleichung Gleichheit gelten, und damit folgt $\left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 = 0$, also auch $c_1 = c_2$. $\square$