Mediane Räume haben messbare Wände

Ziel ist es, das folgende Theorem zu beweisen:

Theorem: Sei $(X, dist)$ ein medianer Raum. Sei $\mathcal{W}$ die Menge der konvexen Wände auf X und sei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra, die von der Menge $\mathcal{U} := \{\mathcal{W}(x|y) \mid x, y \text{ Punkte in } X\}$ erzeugt wird.
Dann existiert ein Maß μ auf $\mathcal{B}$, sodass gilt:

(i) $\mu(\mathcal{W}(x|y)) = dist(x,y)$. Damit ist dann
$(X, \mathcal{W}, \mathcal{B}, \mu)$ ein Raum mit messbaren Wänden.

(ii) Jede Isometrie von $(X, dist)$ ist ein Automorphismus von dem Raum mit messbaren Wänden $(X, \mathcal{W}, \mathcal{B}, \mu)$.

Strategie:

Schritt 1: Wir definieren eine Algebra $\mathcal{R} := \{\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(F_i|G_i) \mid \emptyset \neq F_i, G_i \subseteq X \text{ endl.}\}$
So definiert lässt sich sehr leicht zeigen, dass $\mathcal{R}$ eine Algebra ist.

Schritt 2: Wir zeigen für zwei nichtleere, endliche Mengen F, G, dass $\mathcal{W}(F|G) = \mathcal{W}(x|y)$, damit wir dann
$\mathcal{R} = \{\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(x_i|y_i) \mid x_i, y_i \text{ Punkte in } X\}$ bekommen.

Schritt 3: Wir definieren ein Prämaß μ auf $\mathcal{R}$ mit $\mu(\mathcal{W}(x|y)) = dist(x,y)$ und wollen dann den Satz von Caratheodory benutzen, um das Theorem zu beweisen.

Caratheodory: Sei A^* eine σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält.
Dann existiert ein Maß μ^* auf A^*, sodass $\mu^*|_{\mathcal{R}}$ ein Maß ist und auf $\mathcal{R}$ mit dem Prämaß μ übereinstimmt.

Schritt 1: $\mathcal{R} := \{ \dot\bigcup \mathcal{W}(F_i | G_i) \mid \emptyset \neq F_i, G_i \subseteq X$ endlich, $n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \}$.

Lemma 1: $\mathcal{R}$ ist eine Algebra.

Beweis:

(i) $\mathcal{R} \neq \emptyset$. ✓

(iii) $A \in \mathcal{R} \Rightarrow A^c \in \mathcal{R}$:

Sei also $\mathcal{W}(F|G) \in \mathcal{R}$.

Dann $\mathcal{W}(F|G)^c = \dot\bigcup_{\substack{S \dot\cup T = F \cup G, \\ \{S,T\} \neq \{F,G\}}} \mathcal{W}(S|T) \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow$ (iii).

(ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$:

$$\mathcal{W}(F|G) \cap \mathcal{W}(F'|G') = \mathcal{W}(F \cup G' | G \cup G') \dot\cup \mathcal{W}(F \cup G' | G \cup F') \in \mathcal{R}.$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\mathcal{W}(F|G)^c}_{\in \mathcal{R}} \cap \underbrace{\mathcal{W}(F'|G')^c}_{\in \mathcal{R}}}_{\in \mathcal{R}} = (\mathcal{W}(F|G) \cup \mathcal{W}(F'|G'))^c \in \mathcal{R}$$

$$\overset{(iii)}{\Rightarrow} ((\mathcal{W}(F|G) \cup \mathcal{W}(F'|G'))^c)^c = \mathcal{W}(F|G) \cup \mathcal{W}(F'|G') \in \mathcal{R}$$

$\Rightarrow$ (ii).

□

Damit ist Schritt 1 bereits abgeschlossen und $\mathcal{R}$ ist tatsächlich eine Algebra.

Schritt 2: $\mathcal{W}(F|G) = \mathcal{W}(x|y)$.

<u>Lemma 2</u>: Sei (x, y, z) eine Geodäte. Dann gilt
$$\mathcal{W}(x|z) = \mathcal{W}(x|y) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(y|z).$$

<u>Beweis</u>:

Wegen Konvexität der Wände gilt $\mathcal{W}(x|y) \cap \mathcal{W}(y|z) = \emptyset$.

„$\subseteq$": Sei $\{h, h^c\} = w \in \mathcal{W}(x|z)$.

Falls $y \in h$, dann gilt auch $w \in \mathcal{W}(y|z)$.

Falls $y \in h^c$, dann gilt auch $w \in \mathcal{W}(x|y)$.

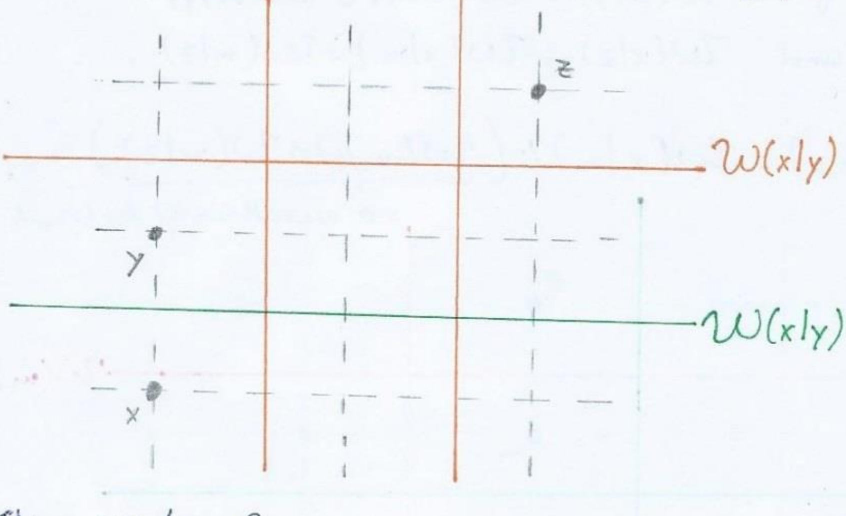
$\Rightarrow w \in \mathcal{W}(x|y) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(y|z)$.

„$\supseteq$" Sei $w \in \mathcal{W}(x|y) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(y|z)$.

OE $w \in \mathcal{W}(x|y)$.

Wegen Konvexität der Wände ist dann auch $z \in h^c$.

$\Rightarrow w \in \mathcal{W}(x|z)$. $\square$



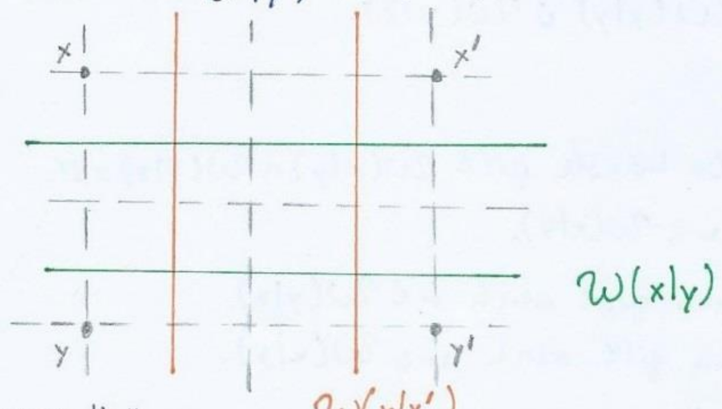
Skizze zu Lema 2.

<u>Korollar 3</u>: Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine geodätische Reihe. Dann gilt
$$\mathcal{W}(x_1|x_n) = \mathcal{W}(x_1|x_2) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(x_2|x_3) \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, \mathcal{W}(x_{n-1}|x_n).$$

Korollar 4: Seien (x,y) und (x',y') parallele Paare.

Dann gilt $\mathcal{W}(x|y) = \mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(x,x'|y,y')$

und $\mathcal{W}(x|y') = \mathcal{W}(x'|y) = \mathcal{W}(x|y) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(x|x')$.



Skizze zu Kor. 4

Lemma 5: Gegeben seien Punkte x,y,z in X und $m := m(x,y,z)$.
Dann gilt $\mathcal{W}(x|y,z) = \mathcal{W}(x|m)$.

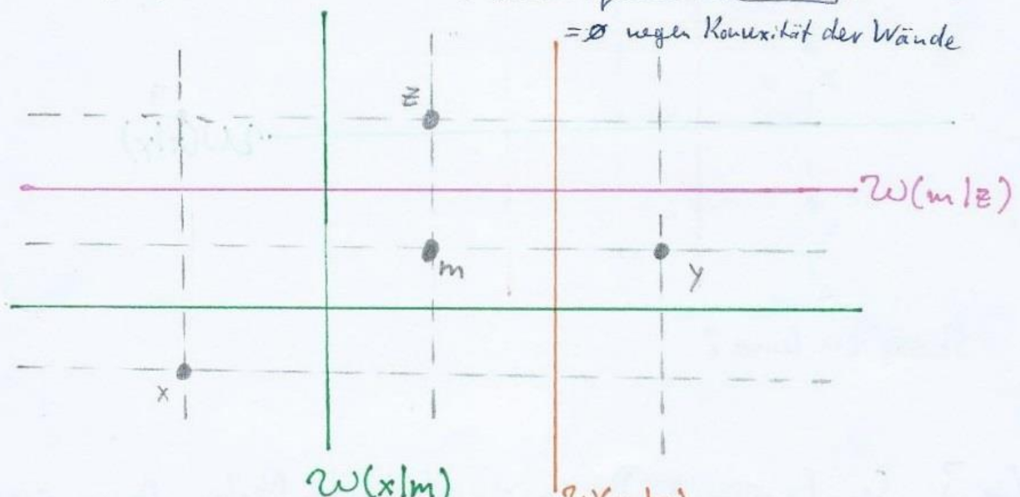
Beweis:

Nach Lemma 1 gilt $\mathcal{W}(x|y) = \mathcal{W}(x|m) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(m|y)$

und $\mathcal{W}(x|z) = \mathcal{W}(x|m) \,\dot\cup\, \mathcal{W}(m|z)$.

$$\Rightarrow \mathcal{W}(x|y,z) = \mathcal{W}(x|m) \,\dot\cup\, \big(\underbrace{\mathcal{W}(m|y) \cap \mathcal{W}(m|z)}_{=\emptyset \text{ wegen Konvexität der Wände}}\big).$$

$\square$

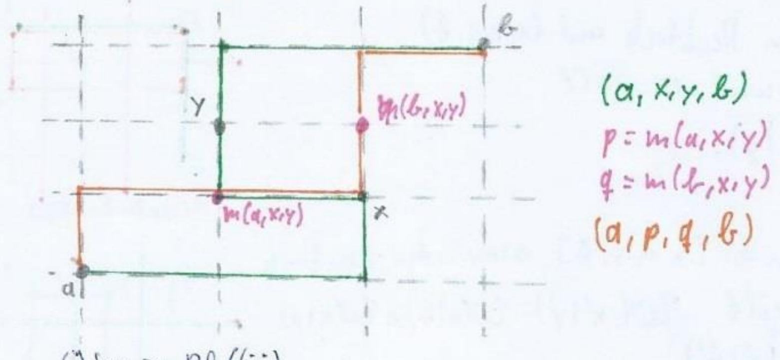


Skizze zu Lemma 5.

Definition 6:

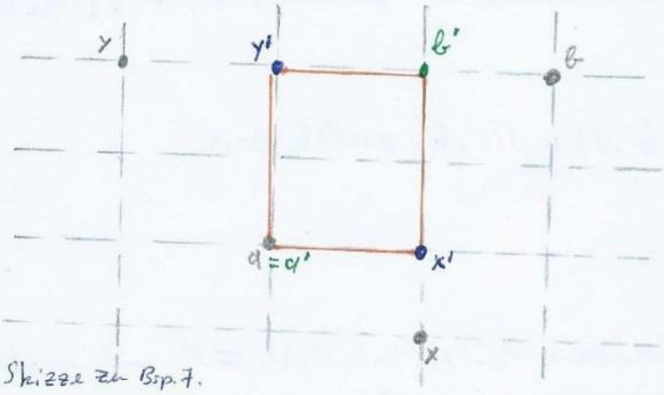
(i) Die Projektion eines Paares (x,y) auf $I(a,b)$ ist ein Paar (x',y') mit $x'=m(x,a,b)$ und $y'=m(y,a,b)$

(ii) Sind $x,y \in I(a,b)$, dann ist die Begradigung des Pfades (a,x,y,b) der Pfad (a,p,q,b) mit $p=m(a,x,y)$ und $q=m(b,x,y)$.
(p,q) ist also die Projektion von (a,b) auf $I(x,y)$.



Skizze zu Def 6(ii).

Beispiel 7 (zentrales Rechteck):



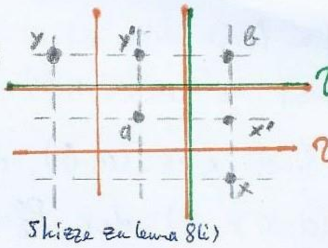
Skizze zu Bsp. 7.

Erhalte (x',y') durch Projektion von (x,y) auf $I(a,b)$.
Dann sind $x',y' \in I(a,b)$.
Erhalte dann (a',b') durch Begradigung von (a,x',y',b) zu (a,a',b',b),
also $a'=m(a,x',y')$ und $b=m(b,x',y')$.
Dann ist $[a',x',b',y']$ das zentrale Rechteck.

Lemma 8 (Eigenschaften von Projektion und Begradigung):

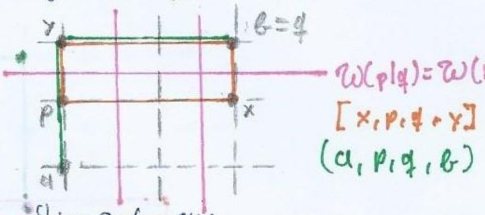
Seien (a,b) und (x,y) zwei Paare von Punkten.

(i) Sei (x',y') die Proj. von (x,y) auf $I(a,b)$. Dann gilt
$$\mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y).$$



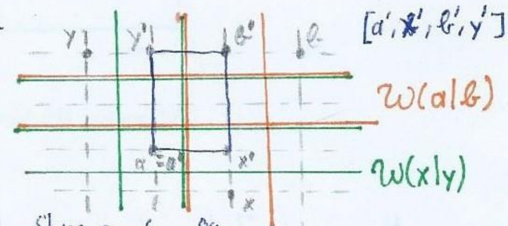
Skizze zu Lemma 8(i)

(ii) Seien $x,y \in I(a,b)$. Sei (p,q) die Projektion von (a,b) auf $I(a,b)$.
Dann ist $[x,p,q,y]$ ein Rechteck und (a,p,q,b) ist eine Geodäte und es gilt
$$\mathcal{W}(p|q) = \mathcal{W}(x|y).$$



Skizze zu Lemma 8(ii)

(iii) Sei $[a',x',b',y']$ das zu $[x,a,y,b]$ assoziierte zentrale Rechteck, dann gilt $\mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y)$ und $\mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a'|b')$.



Skizze zu Lemma 8(iii)

Beweis:

Durch Projektion und Begradigung erhalten wir tatsächlich ein zentrales Rechteck (siehe Bsp. 7), daher reicht es nur (iii) zu zeigen.

Zeige $\mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a'|b')$:

Da $[x',a',y',b']$ ein Rechteck ist, sind (x',y') und (a',b') parallele Paare
$\overset{\text{Kor. 4}}{\Longrightarrow} \mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a'|b')$.

Zeige $\mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y)$:

Da $x' = m(x,a,b)$
$\overset{\text{Lemma 5}}{\Longrightarrow} \mathcal{W}(x|x') = \mathcal{W}(x|a,b)$ und insbesondere $\mathcal{W}(x|x') \cap \mathcal{W}(a|b) = \emptyset$ und analog
$\mathcal{W}(y|y') = \mathcal{W}(y|a,b)$ und $\mathcal{W}(y|y') \cap \mathcal{W}(a|b) = \emptyset$.

„$\supseteq$": Sei $\{h,h^c\} = w \in \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y)$.

Wegen $\mathcal{W}(x|x') \cap \mathcal{W}(a|b) = \emptyset$, gilt $x' \in h$.

Analog $y' \in h^c$.

$\Rightarrow \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y) \subseteq \mathcal{W}(x'|y')$.

„$\subseteq$": Sei $w \in \mathcal{W}(x'|y')$.

Haben oben schon gesehen dass $\mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a'|b')$. (a,a',b',b) ist Geodäte.

$\Rightarrow \mathcal{W}(x',y') \subseteq \mathcal{W}(a|b)$.

Nach Lemma 2.5 aus Vortrag über Rechtecke:
(x',y') ist parallel zu einem Paar (x'',y''), so dass (x,x'',y'',y) Geodäte ist.
$\Rightarrow \mathcal{W}(x'|y') \overset{\text{Kor. 4}}{=} \mathcal{W}(x''|y'') \subseteq \mathcal{W}(x|y)$.

Und mit $\mathcal{W}(x'|y') \subseteq \mathcal{W}(a|b)$ und $\mathcal{W}(x'|y') \subseteq \mathcal{W}(x|y)$ folgt insgesamt $\mathcal{W}(x'|y') \subseteq \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y)$.

$\square$

<u>Proposition 9:</u> Seien $\emptyset \neq F, G \overset{\text{endl.}}{\subseteq} X$. Dann gibt es $p, q \in X$, so dass $\mathcal{W}(F|G) = \mathcal{W}(x|y)$.

<u>Beweis:</u>

$n = |F| + |G|$.

IA: $n = 2$

$|F| = 1,\ |G| = 1$ klar. ✓

$n = 3$

$F = \{x\},\ G = \{y, z\},\ m = m(x, y, z)$

dann $\mathcal{W}(F|G) = \mathcal{W}(x|m)$ nach Lemma 4. ✓

IS: $n \mapsto n+1$

$|F| + |G| = n+1 \geq 3$.

OE $|F| \geq 2$ und zerlege $F = F_1 \dot\cup \{x\}$

Es gilt $\mathcal{W}(F|G) = \mathcal{W}(F_1|G) \cap \mathcal{W}(x|G)$.

$\Rightarrow |F_1| + |G| = n$ und $|\{x\}| + |G| \leq n$

$\overset{IV}{\Longrightarrow} \mathcal{W}(F_1|G) = \mathcal{W}(a|b)$ und $\mathcal{W}(x|G) = \mathcal{W}(c|d)$.

$\Rightarrow \mathcal{W}(F|G) = \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(c|d)$

Nun projeziere entweder (a, b) auf $I(c, d)$ oder (c, d) auf $I(a, b)$ und erhalte (p, q) dadurch.

$\overset{\text{Lemma 8}}{\Longrightarrow} \mathcal{W}(p|q) = \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(c|d)$.

□

Damit ist nun $\mathcal{R} = \{ \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{W}(x_i|y_i) \mid x_i, y_i \text{ Punkte in } X,\ n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \}$ und Schritt 2 abgeschlossen und es folgt Schritt 3.

Schritt 3: Def. Prämaß μ auf $\mathcal{R}$ mit $\mu(\mathcal{W}(x|y)) = dist(x,y)$, um später Satz von Caratheodory anzuwenden.

Zuerst möchten wir uns darum kümmern, dass unsere additive Funktion, die wir später durch μ definieren wollen auch wohldefiniert ist.

<u>Lemma 10:</u> Wenn $\mathcal{W}(a|b) = \mathcal{W}(x|y)$, dann ist auch $dist(a,b) = dist(x,y)$.

<u>Beweis:</u> Sei also $\mathcal{W}(a|b) = \mathcal{W}(x|y)$.

„$\leq$": Sei (x',y') die Projektion von (x,y) auf $I(a,b)$.

$\overset{\text{Lemma 8}}{\Rightarrow} \mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a|b) \cap \mathcal{W}(x|y) = \mathcal{W}(a|b)$

⌈ Nach Kor. 1 aus Vortrag über Konvexität und Tor-Eigenschaft ist die Abbildung $\pi_{I(a,b)}: X \to I(a,b)$, $x \mapsto x' = m(x,a,b)$ 1-Lipschitz (und eine Projektion ist ja nur die Abbildung $\pi_{I(a,b)} \times \pi_{I(a,b)}$). ⌋

$\Rightarrow d(x',y') \leq dist(x,y)$.

Nun begradige (a,x',y',b) zu (a,p,q,b).

$\overset{\text{Lemma 8}}{\Rightarrow} \mathcal{W}(p|q) = \mathcal{W}(x'|y') = \mathcal{W}(a|b)$ und (a,p,q,b) ist Geodäte.

$\overset{\text{Kor. 3}}{\Rightarrow} \mathcal{W}(a|b) = \mathcal{W}(a|p) \,\dot\cup\, \underbrace{\mathcal{W}(p|q)}_{=\mathcal{W}(a|b)} \,\dot\cup\, \mathcal{W}(q|b)$.

$\Rightarrow \mathcal{W}(a|p) = \mathcal{W}(q|b) = \emptyset$

$\Rightarrow a = p$ und $q = b$

$\Rightarrow dist(a,b) = dist(p,q)$

und nach Kor. 4 $dist(p,q) = dist(x',y') \overset{\text{s.o.}}{\leq} dist(x,y)$.

„$\geq$": Beginne mit Projektion von (a,b) auf $I(x,y)$ und der Beweis dieser Richtung funktioniert komplett analog.

□

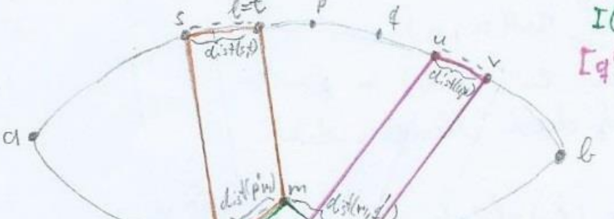
Wir sind immernoch bei der Wohldefiniertheit, müssen aber zum Beweis der Proposition 12 erst folgender Lemma einschieben.

<u>Lemma 11:</u> Sei $(X, dist)$ ein medianer Raum. Betrachte zwei Geodäten mit gemeinsamen Endpunkten (a,p,q,b) und (a,p',q',b), für die $\mathcal{W}(p|q) \cap \mathcal{W}(p'|q') = \emptyset$ gilt. Sei (s,t) die Projektion von (p',q') auf $I(a,p)$ und sei (u,v) die Projektion von (p',q') auf $I(q,b)$.
Dann gilt $dist(p',q') = dist(s,t) + dist(u,v)$.

<u>Beweis:</u>

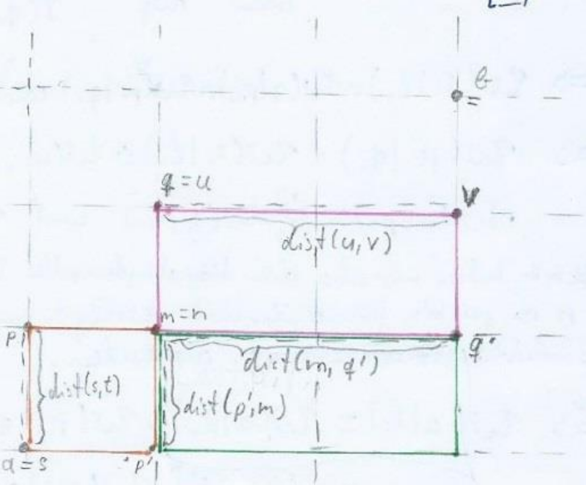
Betrachte zwei weitere Punkte $m := m(t,p',q')$ und $n := m(u,p',q')$.
(t,m,p'), (p',s,t) sind per Konstruktion Geodäten.
Es sind also $m,s \in I(p',t)$.
Projektion von (p',t) auf $I(m,s)$ ergibt (k,l) mit
$k = m(p',m,s)$ und $l = (t,m,s) \Rightarrow k = p'$ und $l = t$.
$\Rightarrow [p',m,t,s]$ war bereits ein Rechteck.
$\overset{\text{Lemma 8}}{\Rightarrow} \mathcal{W}(p'|q') \cap \mathcal{W}(a|p) = \mathcal{W}(s|t) \overset{\text{Kor. 5}}{=} \mathcal{W}(p'|m)$
$\overset{\text{Lemma 11}}{\Rightarrow} dist(s,t) = dist(p',m)$.
Analog: $\mathcal{W}(p'|q') \cap \mathcal{W}(q'|b) = \mathcal{W}(u|v) = \mathcal{W}(n|q')$ und $dist(u,v) = dist(n,q')$.
Nun war ja (p',m,q') Geodäte $\Rightarrow (a,p',m,q',b)$, (a,p,q,b) Geodäten.
$\Rightarrow \mathcal{W}(p'|q') = \mathcal{W}(p'|m) \dot\cup \mathcal{W}(m|q') \subseteq \mathcal{W}(a|b) = \mathcal{W}(a|p) \dot\cup \mathcal{W}(p|q) \dot\cup \mathcal{W}(q|b)$
$\Rightarrow \mathcal{W}(a|p) \cap \mathcal{W}(p'|q') = \mathcal{W}(p'|m)$ und $\mathcal{W}(q|b) \cap \mathcal{W}(p'|q') = \mathcal{W}(m|q')$
Analog: $\mathcal{W}(a|p) \cap \mathcal{W}(p'|q') = \mathcal{W}(p'|n)$ und $\mathcal{W}(q|b) \cap \mathcal{W}(p'|q') = \mathcal{W}(n|q)$
$\Rightarrow \mathcal{W}(p'|m) = \mathcal{W}(p'|n)$ und $\mathcal{W}(m|q') = \mathcal{W}(n|q')$
$\Rightarrow dist(p',m) = dist(p',n) = dist(s,t)$ und $dist(m,q') = dist(n,q') = dist(u,v)$
$\Rightarrow dist(p',q') = dist(p',m) + dist(m,q') = dist(s,t) + dist(u,v)$.

$\square$



[p',m,t,s]
I(p',q')
[q',v,u,n]

Skizze 1 zu Lemma 11



Skizze 2 zu Lemma 11

Eine Proposition, um die Wohldefiniertheit zu gewährleisten.

Proposition 12: Nehme an, für zwei Punkte $a, b \in X$ gilt

$$\mathcal{W}(a|b) = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(x_i|y_i).$$

Dann existiert eine Geodäte $(a=a_1, \dots, a_n=b)$ und eine Partition $\{1, \dots, 2^n-1\} = I_1 \dot\cup \dots \dot\cup I_n$, sodass gilt:

(i) für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $|I_j| = 2^{j-1}$ und $\mathcal{W}(x_j|y_j) = \dot{\bigcup}_{i \in I_j} \mathcal{W}(a_i|a_{i+1})$

(ii) für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\operatorname{dist}(x_j, y_j) = \sum_{i \in I_j} \operatorname{dist}(a_i, a_{i+1})$.

Insbesondere gilt dann $\operatorname{dist}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(x_i, y_i)$.

Beweis:

IA: $n=1$ folgt aus Lemma 10.

IS: $n-1 \mapsto n$

OE $x_i, y_i \in I(a,b)$ (sonst projeziere vorher auf $I(a,b)$).

Begradige (a, x_1, y_1, b) zu (a, p_1, q_1, b) und (a, p_1, q_1, b) ist dann Geodäte und $\mathcal{W}(p_1|q_1) = \mathcal{W}(x_1|y_1)$.

$$\Rightarrow \mathcal{W}(a|b) = \mathcal{W}(a|p_1) \dot\cup \underbrace{\mathcal{W}(p_1|q_1)}_{=\mathcal{W}(x_1|y_1)} \dot\cup \mathcal{W}(q_1|b).$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}(a|p_1) \dot\cup \mathcal{W}(q_1|b) = \dot{\bigcup}_{i=2}^{n} \mathcal{W}(x_i, y_i).$$

Nun begradige (a, x_i, y_i, b) zu (a, p_i, q_i, b) für $i \geq 2$.

$$\Rightarrow \mathcal{W}(x_i|y_i) = \mathcal{W}(p_i|q_i)$$

$$\overset{\text{Lemma 10}}{\Rightarrow} \operatorname{dist}(x_i, y_i) = \operatorname{dist}(p_i, q_i).$$

Nun projeziere für $i \geq 2$ die (p_i, q_i) auf $I(a, p_1)$ und erhalte Paare (s_i, t_i)
bzw. auf $I(q_1, b)$ und erhalte Paare (u_i, v_i).

$$\Rightarrow \mathcal{W}(s_i|t_i) = \mathcal{W}(a|p_1) \cap \mathcal{W}(p_i|q_i) \text{ und } \mathcal{W}(u_i, v_i) = \mathcal{W}(q_1|b) \cap \mathcal{W}(p_i|q_i).$$

$$\Rightarrow \mathcal{W}(p_i|q_i) = \mathcal{W}(s_i|t_i) \dot\cup \mathcal{W}(u_i, v_i),\ i \geq 2,$$

$$\mathcal{W}(a|p_1) = \dot{\bigcup}_{i=2}^{n} \mathcal{W}(s_i, t_i) \text{ und } \mathcal{W}(q_1|b) = \dot{\bigcup}_{i=2}^{n} \mathcal{W}(u_i, v_i)$$

Jetzt haben wir also die Wandintervalle $\mathcal{W}(a|p_1)$ bzw. $\mathcal{W}(q_1|b)$ in jeweils n disjunkte Wandintervalle zerlegt und können auf diese Mengen die Induktionsvoraussetzung anwenden.

$$\overset{IV}{\Rightarrow} \mathcal{W}(a|b) = \mathcal{W}(a|p_1) \dot\cup \mathcal{W}(p_1|q_1) \dot\cup \mathcal{W}(q_1|b) = \dot{\bigcup}_{i=2}^{n}\mathcal{W}(s_i|t_i) \dot\cup \mathcal{W}(p_1|q_1) \dot\cup \dot{\bigcup}_{i=2}^{n}\mathcal{W}(u_i, v_i)$$

$$= \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(p_i|q_i) \qquad = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(x_i|y_i)$$

$$\Rightarrow \operatorname{dist}(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(p_i, q_i)$$

$$= \sum_{i=2}^{n} \operatorname{dist}(p_i, q_i) + \operatorname{dist}(p_1, q_1)$$

$$\overset{\text{Lemma 11}}{=} \sum_{i=2}^{n} \operatorname{dist}(s_i, t_i) + \sum_{i=2}^{n} \operatorname{dist}(u_i, v_i) + \operatorname{dist}(p_1, q_1).$$

$\square$

Korollar 13: Es gibt eine eindeutige Funktion $\mu: \mathcal{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mu(\mathcal{W}(x|y)) = dist(x,y)$, die additiv ist.

Nun wollen wir zeigen, dass es sich bei der additiven Funktion μ tatsächlich um ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ handelt.

Dazu an dieser Stelle noch einmal kurz die Eigenschaften, die ein Prämaß erfüllen muss:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B)$, $A, B \in \mathcal{R}$,

(iii) Wenn $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ eine monoton fallende Folge ist mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, dann ist $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Lemma 10 und Proposition 12 gewährleisten uns die Eigenschaften (i) und (ii). Die folgende Proposition soll uns Eigenschaft (iii) gewährleisten.

Proposition 14: Sei $(X, dist)$ ein medianer Raum, ausgestattet mit konvexen Wänden. Wenn $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge (bzgl. „$\subseteq$") ist mit $I_n := \dot{\bigcup}_{i=1}^{k_n} \mathcal{W}(x_i|y_i)$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$, dann ist $I_k = \emptyset$ für k groß genug.

Beweis: Als erstes wollen wir zeigen, dass $\mathcal{H}(x|y)$ kompakt ist.
Dazu wollen wir im Folgenden Halbräume mit ihren charakteristischen Funktionen identifizieren.
Also $\chi_h = \begin{cases} 0, & x \in h \\ 1, & x \notin h \end{cases}$ gibt uns ein eindeutiges Tupel aus Nullen und Einsen mit dem wir einen Halbraum h identifizieren können.
Mit dieser Identifizierung ist dann $\{h \mid w = \{h, h^c\} \text{ konvexe Wand}\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \{0,1\}^X$.
Und ebenso $\mathcal{H}(x|y) = \{h \mid h \text{ Halbraum}, x \in h, y \notin h\} \overset{\text{abg.}}{\subseteq} \{f : X \to \{0,1\} \mid f(x) = 0, f(y) = 1\} \overset{\text{kompakt}}{\subseteq} \{0,1\}^X$
Damit ist $\mathcal{H}(x|y)$ als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge kompakt.
Jetzt kümmern wir uns wieder um den eigentlichen Beweis der Proposition.
Sei $I_0 := \mathcal{W}(x|y)$. Da $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ist $I_n \subseteq \mathcal{W}(x|y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Definiere nun $H_n = \{h \mid \{h, h^c\} \in I_n, \ h \text{ Halbraum}, \ x \in h\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Damit ist auch $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge mit $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \emptyset$.
Nun projeziere X auf $I(x,y)$.
Dann haben wir $I_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(x_i|y_i)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $x_i, y_i \in I(x,y)$.
Dann begradigen wir (x, x_i, y_i, y) zu (x, p_i, q_i, y)
und (x, p_i, q_i, z) Geodäte und $\mathcal{W}(x_i|y_i) = \mathcal{W}(p_i|q_i)$.
Damit folgt $H_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathcal{W}(p_i|q_i)$ und nach obigem war H_n kompakt.
Also existiert ein H_k mit $H_k = \emptyset$.
$\Rightarrow I_k = \emptyset$.

$\square$

Damit ist unser μ also tatsächlich ein Prämaß auf $\mathcal{R}$ und wir kommen nun zum Beweis des Theorems.

Beweis vom Theorem:

Wir haben gesehen, dass μ Prämaß auf $\mathcal{R}$ ist.
Nach Satz von Caratheodory gibt es nun eine Erweiterung μ^* von μ, die ein Maß ist und auf einer $\mathcal{R}$ enthaltenden σ-Algebra A^* definiert ist. Es gilt $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$.

Da $\mathcal{U} = \{ \mathcal{W}(x|y) \mid x, y \text{ Punkte in } X \} \subseteq \{ \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{W}(x_i|y_i) \mid x_i y_i \text{ Punkte in } X \}$ gilt wegen Monotonie auch für die σ-Algebren $\mathcal{B}$ und A^*, dass $\mathcal{B} \subseteq A^*$.
Damit ist $\mu^*|_{\mathcal{B}}$ eine Maßerweiterung von $\mu|_{\mathcal{U}}$.
Wir definieren noch $\tilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{B}}$ und haben nun mit $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\mathcal{B}$ gefunden mit $\tilde{\mu}(\mathcal{W}(x|y)) = \operatorname{dist}(x, y)$, was $(X, \mathcal{W}, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$ zu einem Raum mit messbaren Wänden macht.

Eine Isometrie von (X, dist) definiert nun eine bijektive Transformation auf $\mathcal{W}$, bei der $\mathcal{R}$ und $\tilde{\mu}$ erhalten bleiben.
Damit bleiben auch μ^* und A^* erhalten und eine Isometrie definiert einen Automorphismus auf dem messbaren Raum $(\mathcal{W}, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$ bzw. auf dem Raum mit messbaren Wänden $(X, \mathcal{W}, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$.