

Konvexität und Tor-Eigenschaft

Wiederholung:

Definition: Sei (X, pdist) ein pseudometrischer Raum und $x, y, z \in X$.

Ein Intervall von x und y ist $I(x, y) := \{a \in X \mid \text{pdist}(x, a) + \text{pdist}(y, a) = \text{pdist}(x, y)\}$

Ein medianer Raum ist ein Raum mit pseudo-Metrik, in dem für alle drei Punkte x, y, z gilt:

- (i) Die Menge der medianen Punkte $M(x, y, z) := I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(x, z)$ ist nicht leer.
- (ii) Für alle medianen Punkte a und b in $M(x, y, z)$ gilt $\text{pdist}(a, b) = 0$

Bemerkung: In einem metrischen medianen Raum gibt es genau einen eindeutigen medianen Punkt für drei Punkte x, y, z . Bezeichne diesen mit $m(x, y, z)$.

Beispiele: (i) Bäume, (ii) $(X^{(1)}, D)$ für $X \text{ CAT}(0)$ kubischer Komplex (iii) $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}), S^1(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$

Was wir zeigen werden:

- (1) Die Projektionsabbildung auf eine Tor-konvexe Teilmenge ist 1-Lipschitz.
(2) Jede Tor-konvexe Teilmenge ist abgeschlossen und konvex.
(3) In einem vollständigen, medianen Raum ist jede abgeschlossene, konvexe Teilmenge Tor-konvex.
- In einem medianen Raum ist jedes Intervall $I(a, b)$ Tor-konvex und das Tor zwischen einem beliebigen Punkt x und $I(a, b)$ ist $m(x, a, b)$.
- Sei X medianer Raum:
(1) Für zwei feste Punkte $a, b \in X$ ist $I(a, b)$ abgeschlossen und konvex.
Wird x auf $m(x, a, b)$ abgebildet, so ist die Abbildung 1-Lipschitz.
(2) Die Abbildung die drei Punkte auf ihren medianen Punkt abbildet ist 1-Lipschitz
($m: X * X * X \rightarrow X$)
- (Helly's Eigenschaft:) Sei X ein medianer Raum und $X_1, \dots, X_n \subset X$ konvex.
Wenn $X_i \cap X_j$ nicht leer für $i, j = 1, \dots, n$, dann ist auch $X_1 \cap \dots \cap X_n$ nicht leer.

Definitionen:

konvex:

Sei $(X, \text{pdist}), Y \subset X$. Dann heißt Y konvex, falls für alle a, b aus Y gilt: $I(a, b) \subset Y$.

quasi-konvex:

Sei (X, pdist) , $Y \subset X$. Dann heißt Y quasi-konvex, falls für alle a, b aus Y gilt: $I(a, b) \subset N_M(Y)$, wobei M nicht von a und b abhängt. (Und $N_M(Y) = \{y \in X \mid \text{pdist}(y, Y) \leq M\}$).

konvexe Hülle:

Sei $Y \subset X$. Die konvexe Hülle von Y ist der Durchschnitt aller konvexen Teilmengen, die Y enthalten.

zwischen:

Sei (X, dist) ein metrischer Raum. $Y \subset X$, $x \in X$.

Wir sagen ein Punkt $p \in X$ liegt zwischen x und Y , wenn er zwischen x und jedem $y \in Y$ ist.

(D.h. $d(x, y) = d(y, p) + d(p, y)$ für alle $y \in Y$.)

Tor:

Sei (X, dist) ein metrischer Raum. $Y \subset X$, $x \in X$.

Wenn ein Punkt $p \in Y$ zwischen x und Y liegt, dann heißt p Tor zwischen x und Y .

(Beachte: hier ist p aus Y . Bei der Def. von 'zwischen' war nur gefordert, dass p in X liegt.)

Tor-konvex:

Sei (X, dist) ein metrischer Raum. $Y \subset X$.

Y heißt Tor-konvex, falls für jedes $x \in X$ ein Tor in Y existiert, das zwischen x und Y liegt.

Bezeichne dieses mit $\pi_Y(x)$.

Bemerkung: Das Tor ist wohldefiniert, denn angenommen es gibt zwei verschiedene Tore t und t' zwischen x und Y , dann ist t auch ein Tor zu t' und t' zu t .

Da das Tor auf einem metrischen Raum definiert ist, müssen t und t' schon gleich sein.

Projektionsabbildung:

Die Projektionsabbildung ist in diesem Vortrag π_Y , welche x abbildet auf das Tor zwischen x und Y .

$\pi_Y: X \rightarrow Y, x \mapsto \pi_Y(x)$

1. Lemma a) :

Die Projektionsabbildung auf eine Tor-konvexe Teilmenge ist 1-Lipschitz.

Wiederholung:

Ein Pfad ist eine endliche Reihe von Punkten $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Ein Pfad wird geodätische Reihe genannt, falls:

$\text{pdist}(a_1, a_n) = \text{pdist}(a_1, a_2) + \text{pdist}(a_2, a_3) + \dots + \text{pdist}(a_{n-1}, a_n)$

Anders gesagt: (a, b, c) ist geodätische Reihe, falls $b \in I(a, c)$.

Beweis: Sei $Y \subset X$ eine Tor-konvexe Teilmenge. Wir wissen dann: Zu jedem Punkt $x \in X$ existiert ein Tor in Y . Die Projektionsabbildung ist π_Y mit $\pi_Y(x)$ ist das Tor zwischen einem x und Y .

Wir müssen zeigen, dass gilt: $d(\pi_Y(x), \pi_Y(x')) \leq d(x, x')$.

Setze $p := \pi_Y(x)$, $p' := \pi_Y(x')$ (Die Tore von x und x' in Y).

Nun wissen wir: (x, p, p') und (x', p', p) sind geodätische Folgen.

(Zu (x, p, p') : p liegt zwischen x und jedem Punkt aus Y . p' in $Y \rightarrow (x, p, p')$ geodätische Folge. Für (x', p', p) genauso)

Mit Δ -Ungleichung erhalten wir:

$d(x,p)+d(p,p')=d(x,p')$ (denn (x,p,p') geodätische Folge) und $d(x,p') \leq d(x,x')+d(x',p')$.
Also: $d(x,p)+d(p,p') \leq d(x,x')+d(x',p')$ was äquivalent ist zu: $d(p,p') \leq d(x,x')+d(x',p') - d(x,p)$
und $d(x',p')+d(p',p) \leq d(x',x)+d(x,p)$ was äquivalent ist zu: $d(p,p') \leq d(x',x)+d(x,p) - d(x',p')$.
 $\rightarrow 2d(p,p') \leq 2d(x,x') \rightarrow d(p,p') \leq d(x,x')$

□

1. Lemma b) :

Jede Tor-konvexe Teilmenge ist abgeschlossen und konvex.

Zeige hierfür:

a) $Y \subset X$ ist konvex. Für zwei Punkte x, z aus Y ist auch $I(x,y) \subset Y$.

Das heißt jeder Punkt zwischen den beiden Punkten x, z liegt in Y .

b) Y ist abgeschlossen (wir zeigen: $\bar{Y} \subset Y$).

Beweis: zu a) Seien x und z aus Y und (x,y,z) eine geodätische Folge. Zu zeigen: $y \in Y$.

Sei p das Tor zwischen y und Y (wir dürfen davon ausgehen, dass ein Tor existiert, da Y Tor-konvexe Teilmenge), sodass (y,p,x) und (y,p,z) geodätische Folgen sind.

$\rightarrow (x,p,y,p,z)$ ist geodätische Folge $\rightarrow y=p \in Y$

zu b) Sei p das Tor zwischen $x \in \bar{Y}$ und Y . $d(x,Y) = 0 \rightarrow d(x,p)=0 \rightarrow x=p \in Y \rightarrow x \in Y \rightarrow Y$ abgeschlossen □

1. Lemma c) :

In einem vollständigen, medianen Raum ist jede abgeschlossene, konvexe Teilmenge Tor-konvex.

Bemerkung: Ein medianer Raum ist vollständig, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Zeige: Sei $Y \subset X$ abgeschlossen und konvex. Dann existiert für jedes x aus X ein Tor in Y .

Vorgehen: Suche Cauchyfolge in Y , deren Limes das Tor ist.

(Der Limes liegt zumindest in X , da X vollständig. Aber da Y abgeschlossen, würde dann folgen, dass der Limes auch in Y liegt. So finden wir immer ein Tor.)

Beweis: Sei also Y eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge eines vollständigen medianen Raumes X . Für jedes $x \in X$ wähle eine Folge $(y_k)_{k \geq 0}$ aus Punkten aus Y , sodass $d(y_k, x) \rightarrow d(x, Y)$.

Dies ist eine Cauchyfolge, denn:

Sei $\delta_k := d(y_k, x) - d(Y, x) \rightarrow 0$, $\delta_l := d(y_l, x) - d(Y, x) \rightarrow 0$

Sei $m_{k,l}$ der mediane Punkt von (x, y_k, y_l)

$\rightarrow d(x, y_k) + d(x, y_l) = 2d(x, m_{k,l}) + d(y_k, y_l)$. Weil Y konvex und weil der mediane Punkt $m_{k,l}$ im Intervall zwischen y_k und y_l liegt folgt, dass $m_{k,l}$ in Y liegt. Daher folgt weiter: $d(x, y_k) + d(x, y_l) \geq 2d(x, Y) + d(y_k, y_l)$
was äquivalent ist zu: $d(x, y_k) - 2d(x, Y) + d(x, y_l) \geq d(y_k, y_l)$

Aber da $d(x, y_k) - 2d(x, Y) + d(x, y_l) = d(x, y_k) - d(x, Y) + d(x, y_l) - d(x, Y) = \delta_k + \delta_l$,

also $d(y_k, y_l) \leq \delta_k + \delta_l \rightarrow 0$ folgt, dass $d(y_k, x) \rightarrow d(x, Y)$ eine Cauchyfolge ist.

X vollständig $\rightarrow$ Limes von $(y_k)_{k \geq 0}$ liegt in X .

Y abgeschlossen $\rightarrow$ Limes von $(y_k)_{k \geq 0}$ liegt in Y .

Definiere $p :=$ Limes von $(y_k)_{k \geq 0}$

Sei $y \in Y$ und $m(x, p, y)$ der mediane Punkt von x, p und y .

Wegen der Konvexität von $Y \rightarrow m(x, p, y) \in Y$ sodass $d(x, m(x, p, y)) \geq d(x, Y)$

Ferner $d(x, p) = d(x, m(x, p, y)) + d(m(x, p, y), p)$.

Weil $d(x,p)=d(x,Y) \rightarrow d(m(x,p,y), p)=0 \rightarrow m(x,p,y)=p$. □

2. Lemma:

In einem medianen Raum ist jedes Intervall $I(a,b)$ Tor-konvex und das Tor zwischen einem beliebigen Punkt x und $I(a,b)$ ist $m(x,a,b)$.

Beweis: Seien $x,a,b \in X$ beliebig. Sei p der mediane Punkt $m(x,a,b)$ und $y \in I(a,b)$ beliebig.

zz: (x,p,y) ist geodätische Folge.

Seien $a':=m(x,a,y)$, $b':=m(x,b,y)$, $p':=m(x,a',b')$ mediane Punkte.

Bemerke: $p' \in I(x,a') \subset I(x,a)$ und ebenso $p' \in I(x,b)$

Weil (a,y,b) , (a,a',y) und (y,b',b) geodätische Folgen sind, ist (a,a',y,b') geodätisch.

Also $I(a',b') \subset I(a,b)$, daher $p' \in I(a,b)$

Wir haben gezeigt: $p' \in I(x,a) \cap I(x,b) \cap I(a,b)$

Wegen der Eindeutigkeit des medianen Punktes gilt $p'=p \rightarrow p \in I(x,a') \subset I(x,y)$ □

3. Korollar a) :

Sei X medianer Raum. Für zwei feste Punkte $a,b \in X$ ist $I(a,b)$ abgeschlossen und konvex und die Abbildung, die x auf $m(x,a,b)$ abbildet, ist 1-Lipschitz.

Beweis: Wir wissen: In einem medianen Raum ist $I(a,b)$ Tor-konvex und das Tor ist $m(x,a,b)$ (s.o.).

Außerdem: Die Projektionsabbildung ist 1-Lipschitz auf Tor-konvexen Teilmengen.

Also ist die Abbildung die x auf $m(x,a,b)$ abbildet 1-Lipschitz.

Zzb.: $I(a,b)$ ist abgeschlossen und konvex.

Aber wir wissen, dass jede Tor-konvexe Teilmenge abgeschlossen und konvex ist (s.o). □

3. Korollar b) :

Sei $X * X * X$ versehen mit der ℓ_1 -Produktmetrik. Die Abbildung $m: X * X * X \rightarrow X$, die drei Punkte auf ihren medianen Punkt abbildet, ist 1-Lipschitz.

Beweis: Seien x, y, z, x', y', z' aus X . Betrachte $d(m(x,y,z), m(x',y',z'))$. Wegen der Δ -Ungleichung gilt:

$$d(m(x,y,z), m(x',y',z')) \leq d(m(x,y,z), m(x',y,z)) + d(m(x',y,z), m(x',y',z)) + d(m(x',y',z), m(x',y',z')).$$

$$\text{Zu zeigen ist: } d(m(x,y,z), m(x',y',z')) \leq d(x,x') + d(y,y') + d(z,z')$$

Wir werden zeigen:

$$(a) d(m(x,y,z), m(x',y,z)) \leq d(x,x') \quad (b) d(m(x',y,z), m(x',y',z)) \leq d(y,y') \quad (c) d(m(x',y',z), m(x',y',z')) \leq d(z,z')$$

Woraus die Behauptung folgt.

(a) Seien also x, y, z drei Punkte aus X . Betrachte die mediane Abbildung die (x, y, z) auf $m(x, y, z)$ abbildet. $m(x, y, z)$ ist laut Definition im Schnitt aller Intervalle.

Also $\{m(x, y, z)\} = I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(z, y)$ (Gleichheit gilt, da $m(x, y, z)$ eindeutig in metr. med. Raum).

Insbesondere liegt $m(x, y, z)$ also im Intervall $I(y, z)$.

Wir wissen aus Lemma 2, dass jedes Intervall Tor-konvex ist und das Tor zwischen dem Intervall und einem beliebigen Punkt gleich dem medianen Punkt ist.

Betrachte Also $I(y, z)$ mit dem Punkt x . Dann ist $m(x, y, z) = \pi_{I(y, z)}(x)$.

Betrachte genauso x', y, z . Dann ist $m(x', y, z) = \pi_{I(y, z)}(x')$.

Wir zeigten bereits (Lemma 1 a)), dass die Projektionsabbildung 1-Lipschitz ist.

$$\text{Es folgt: } d(m(x, y, z), m(x', y, z)) \leq d(x, x')$$

(b) und (c) analog. Damit sind wir fertig. □

Satz: (*Helly's Eigenschaft*)

Sei X ein medianer Raum und $X_1, \dots, X_n \subset X$ konvex.

Wenn $X_i \cap X_j$ nicht leer für $i, j = 1, \dots, n$, dann ist auch $X_1 \cap \dots \cap X_n$ nicht leer.

Beweis: Wir beweisen die Eigenschaft durch Induktion nach n .

- $n=2$: $X_1 \cap X_2$ nicht leer $\rightarrow X_1 \cap X_2$ nicht leer. ✓

- $n \geq 3$: Sei $Y := X_3 \cap \dots \cap X_n$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt, dass die Schnitte $X_1 \cap X_2, X_1 \cap Y$ und $X_2 \cap Y$ nicht leer sind.

Seien nun $p \in X_1 \cap X_2, q \in X_1 \cap Y$ und $r \in X_2 \cap Y$.

$\rightarrow q, r \in Y$

Da Schnitte konvexer Mengen konvex sind (ohne Beweis) und alle $X_1, \dots, X_n$ nach Voraussetzung konvex sind, ist Y konvex.

Deshalb gilt: $I(p, r) \subset Y$. Da $m(p, q, r) \in I(p, r) \cap I(p, q) \cap I(q, r) \rightarrow m(p, q, r) \in I(p, r) \rightarrow m(p, q, r) \in Y$.

$\rightarrow p, q \in X_1$

X_1 ist nach Voraussetzung konvex. Deshalb ist $I(p, q) \subset X_1$.

Da $m(p, q, r) \in I(p, r) \cap I(p, q) \cap I(q, r) \rightarrow m(p, q, r) \in I(p, q) \rightarrow m(p, q, r) \in X_1$.

$\rightarrow p, r \in X_2$

X_2 ist nach Voraussetzung konvex. Deshalb ist $I(p, r) \subset X_2$.

Da $m(p, q, r) \in I(p, r) \cap I(p, q) \cap I(q, r) \rightarrow m(p, q, r) \in I(p, r) \rightarrow m(p, q, r) \in X_2$.

Nun wissen wir, dass $m(p, q, r) \in Y, m(p, q, r) \in X_1$ und $m(p, q, r) \in X_2$.

$\rightarrow m(p, q, r) \in Y \cap X_1 \cap X_2$. Also ist der Schnitt nicht leer.

□