

Seminar Gruppentheorie und Geometrie

Arbeitsgruppe Geometrie, Topologie und Gruppentheorie

22. Januar 2015

Gruppen als geometrische Objekte

Betrachte Gruppen als Symmetrien von Räumen und untersuche ihre algebraische Eigenschaften mittels geometrischen Eigenschaften der Räume auf denen sie wirken.

Satz von Cayley:

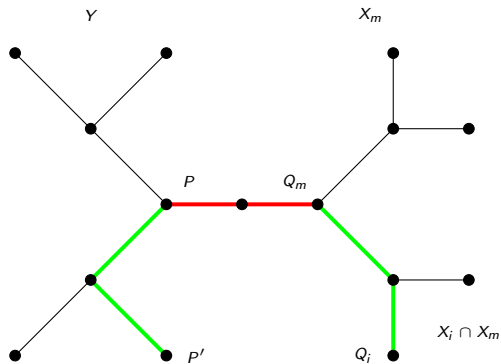
$$G \hookrightarrow \text{Sym}(X)$$

Wir betrachten für die Menge X : metrische Räume mit viel Geometrie: simpliziale Bäume, kubische Komplexe, CAT(0) Räume. . .

- ▶ Grenzbereich Topologie/Algebra/Geometrie
- ▶ Beginn: Späte1980, frühe 1990er

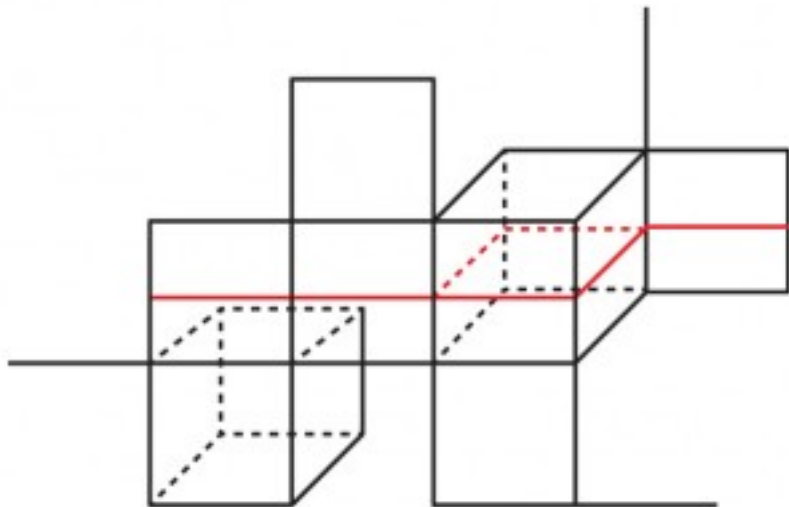
Für uns interessante Räume

► simpliziale Bäume



Für uns interessante Räume

- kubische Komplexe



- CAT(0) Räume, mediane Räume

Für uns interessante Gruppen

$$F_n \rightarrow \mathbb{Z}^n$$

$$\Psi : \text{Aut}(F_n) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$$

$$\Psi|_{\text{SAut}(F_n)} : \text{SAut}(F_n) \rightarrow \text{SL}_n(\mathbb{Z})$$

- ▶ Die Matrizen­gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$
- ▶ Die Matrizen­gruppe $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$
- ▶ Die Automorphismengruppe der freien Gruppe $\text{Aut}(F_n)$
- ▶ Die spezielle Automorphismengruppe der freien Gruppe $\text{SAut}(F_n)$, das Urbild von $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ unter Ψ .

Kazhdan's Eigenschaft (T) für Gruppen

- ▶ In den '60er Jahren hat KAZHDAN aus der Perspektive der Darstellungstheorie eine Klasse von (lokalkompakten) Gruppen mit Kazhdan's Eigenschaft (T) definiert.
- ▶ Viele mathematische Arbeiten haben Kazhdan's Eigenschaft (T) in ganz andere Bereiche der Mathematik übersetzt.
- ▶ Ziel des Seminars ist es diese Eigenschaft in die **geometrische Gruppentheorie** zu übersetzen.

Beispiele

- ▶ Endliche Gruppen haben Kazhdan's Eigenschaft (T).
- ▶ Die Matrizen­gruppen $GL_n(\mathbb{Z})$ und $SL_n(\mathbb{Z})$ für $n \geq 3$ haben Kazhdan's Eigenschaft (T).
- ▶ Für $Aut(F_n)$ und $SAut(F_n)$ für $n \geq 4$ ist diese Frage dagegen noch offen.

Algebraische Eigenschaften von Gruppen mit Kazhdan Eigenschaft (T)

- ▶ G ist endlich erzeugbar
- ▶ Die Kommutatorgruppe von G hat endlichen Index.
- ▶ ...

Serre's Eigenschaft FA für Gruppen

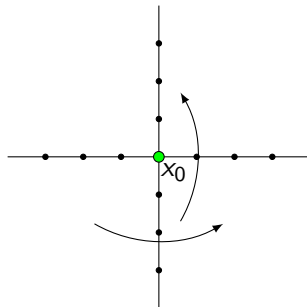
Definition

Eine abzählbare Gruppe hat Serre's Eigenschaft FA, wenn jede abstandserhaltende Wirkung auf einem simplizialen Baum einen Fixpunkt hat, d.h.:

$$\Phi : G \rightarrow \text{Isom}(X)$$

Es existiert $x_0 \in X$, so dass gilt: $\Phi(g)(x_0) = x_0$ für alle $g \in G$.

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$



Kazhdan's Eigenschaft (T) und Serre's Eigenschaft FA

- ▶ G hat Kazhdan's Eigenschaft (T) $\Rightarrow G$ hat Serre's Eigenschaft FA.
- ▶ Die Rückrichtung gilt i. A. nicht!

Die Hauptfrage, die wir in diesem Seminar beantworten werden:

Wie kann man die Klasse der simplizialen Bäume erweitern um eine äquivalente Formulierung für Kazhdans Eigenschaft (T) zu erhalten?

Vorkenntnisse

Sie sollten sich vor allem für Gruppen und Algebra interessieren!
Folgende Vorlesungen sind eine gute Grundlage für das Seminar.

- ▶ Studierende im 1-Fach Bachelor: Analysis III und eine Topologie-Vorlesung oder Gruppentheorie oder Einführung in die Algebra.
- ▶ Studierende im 2-Fach Bachelor: Einführung in die Algebra.

Literatur

1. Serre, *Trees*
2. Bridson-Haefliger, *Spaces of Non-Positive Curvature*
3. Chatterji, Drutu, Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint*
4. Roller, *Poc sets, Median Algebras and Group Actions*

Danke für die Aufmerksamkeit!

Bei Interesse und Fragen zum Seminar können Sie sich an

- ▶ Linus Kramer (linus.kramer@uni-muenster.de)
- ▶ Cora Welsch (c_wels01@uni-muenster.de)
- ▶ Olga Varghese (olga.varghese@uni-muenster.de)

wenden.

Vorbesprechung: 29. Januar 2015 um 12:15 Uhr im Raum SR0