

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Mediane Räume	3
1.1	Mediane Räume	3
1.2	Erinnerung: Maßräume	7

1 Einführung: Mediane Räume

1.1 Mediane Räume

Definition 1.1.1. Sei X eine nichtleere Menge. Eine Abbildung

$$\text{pdist} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

heißt **Pseudometrik** und (X, pdist) heißt **pseudometrischer Raum**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- (i) $\text{pdist}(x, x) = 0$
- (ii) $\text{pdist}(x, y) = \text{pdist}(y, x)$
- (iii) $\text{pdist}(x, z) \leq \text{pdist}(x, y) + \text{pdist}(y, z)$

Wenn zusätzlich gilt

- (iv) $\text{pdist}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,

dann heißt $(X, d := \text{pdist})$ ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 1.1.2. Sei (X, pdist) ein pseudometrischer Raum. Wir definieren auf X die folgende Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow \text{pdist}(x, y) = 0$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned} d : X/\sim \times X/\sim &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ ([x], [y]) &\mapsto \text{pdist}(x, y) \end{aligned}$$

Dann ist $(X/\sim, d)$ ein metrischer Raum und heißt der **metrische Quotient** von X .

Definition 1.1.3. Sei (X, pdist) ein pseudometrischer Raum und $x, y, z \in X$.

- (i) Das Intervall von $\{x, y\}$ ist wie folgt definiert

$$I(x, y) = \{a \in X \mid \text{pdist}(x, a) + \text{pdist}(a, y) = \text{pdist}(x, y)\}$$

1 Einführung: Mediane Räume

(ii) Die Menge der **medianer Punkte** von $\{x, y, z\}$ ist wie folgt definiert

$$M(x, y, z) = I(x, y) \cap I(x, z) \cap I(y, z)$$

Ein pseudometrischer Raum (X, pdist) heißt **median**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) $M(x, y, z)$ ist nicht leer.

(ii) Für alle $m_1, m_2 \in M(x, y, z)$ ist $\text{pdist}(m_1, m_2) = 0$.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt **medianer Unterraum**, falls $M(x, y, z) \cap Y$ nicht leer für alle $x, y, z \in Y$ ist.

Bemerkung 1.1.4. Ein pseudometrischer Raum ist genau dann median, wenn sein metrischer Quotient median ist.

Beispiel 1.1.5. Wir betrachten den $\text{CAT}(0)$ kubischen Komplex $\mathbb{R}^2$ und das 1-Skelett mit der Kästchenmetrik $(X = (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^{(1)}, D)$.

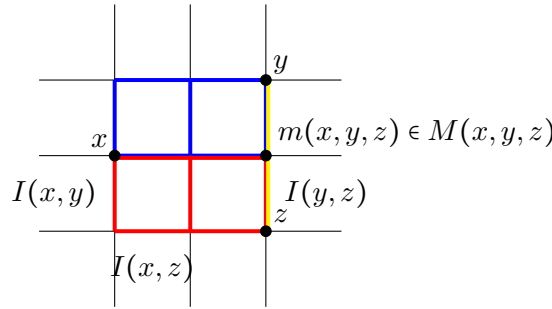


Abbildung 1.1

Beispiele 1.1.6.

(i) $(\mathbb{R}, d_{\text{Eukl.}})$ ist ein medianer metrischer Raum. Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ haben wir $I(x, y) = [x, y]$ und

$$M_{\mathbb{R}}(x, y, z) = \{m_{\mathbb{R}}(x, y, z) := x + y + z - \max\{x, y, z\} - \min\{x, y, z\}\}.$$

(ii) $(\mathbb{R}^n, d_{\text{Eukl.}})$ für $n \geq 2$ ist kein medianer Raum. Wir betrachten $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.

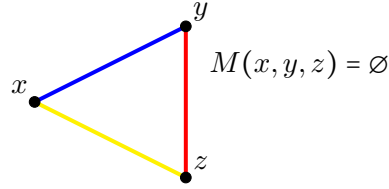


Abbildung 1.2

Erinnerung 1.1.7. Ein Graph (X, d) ist ein 1-dimensionaler kubischer Komplex.

Definition 1.1.8. Ein zusammenhängender Graph (X, d) heißt **median**, falls $(X^{(0)}, d)$ ein medianer metrischer Raum ist.

Theorem 1.1.9. (Roller '98)

Sei (X, d) ein $CAT(0)$ kubischer Komplex. Dann ist $(X^{(1)}, D)$ ein medianer Graph.

Proof. Seien $x, y, z \in X^{(1)}$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass gilt

$$I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(x, z) = \{m(x, y, z)\}$$

Dazu brauchen wir zuerst ein Hilfslemma:

Lemma 1.1.10. Sei X ein $CAT(0)$ kubischer Komplex und $x, y, z \in (X^{(0)}, D)$ beliebig. Dann gilt:

$$z \in I(x, y) \subseteq X^{(1)} \Leftrightarrow \text{es existiert keine Hyperebene } H \text{ mit } z \in H^- \text{ und } \{x, y\} \subseteq H^+.$$

Proof. Wir definieren

$$W(x, y) = \{\text{Hyperebenen die } x \text{ und } y \text{ trennen}\}$$

Aus Phils Vortrag wissen wir: $D(x, y) = \#W(x, y)$. Weiter gilt:

$$z \in I(x, y) \Leftrightarrow W(x, y) = W(x, z) \cup W(z, y)$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} z \in I(x, y) &\Leftrightarrow D(x, y) = D(x, z) + D(z, y) \\ &\Leftrightarrow \#W(x, y) = \#W(x, z) + \#W(z, y) \\ &\Leftrightarrow W(x, z) \cap W(z, y) = \emptyset \end{aligned}$$

□

1 Einführung: Mediane Räume

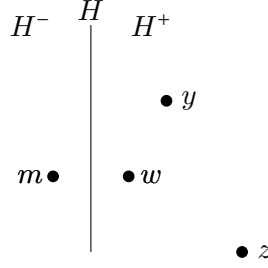


Abbildung 1.3

Weiter im Beweis des Theorems: Zuerst zeigen wir: $M(x, y, z) \neq \emptyset$.

Sei $m \in I(x, y) \cap I(x, z)$ mit $D(x, m)$ ist maximal. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $m \in I(y, z)$. Angenommen $m \notin I(y, z)$. Nach dem Lemma existiert eine Hyperebene H die m und $\{y, z\}$ trennt, d.h. $m \in H^-$ und $\{y, z\} \subseteq H^+$ (siehe Abbildung 1.3). Wähle H mit minimalem Abstand zu m . Sei $w \in H^+$ mit $D(m, w)$ ist minimal. Es gilt $D(m, w) = 1$.

Es gilt (gleich im Detail): $w \in I(x, y)$ und (mit dem selben Argument) $w \in I(x, z)$. Wir haben:

$$D(x, w) = D(x, m) + D(m, w) = D(x, m) + 1$$

Widerspruch zur Maximalität.

Im Detail: Angenommen $w \notin I(x, y)$, dann existiert nach Lemma eine Hyperebene J die w und $\{x, y\}$ trennt, d.h. $w \in J^+$ und $\{x, y\} \subseteq J^-$. Wo liegt m ? Es gilt $m \notin J^+$, denn $m \in I(x, y)$, also $m \in J^-$ und die Hyperebene trennt auch m und w . Es gilt $D(m, w) = 1$, folglich $J = H$. Aber H trennt m und y . Widerspruch. Selbiges Argument für $w \in I(x, z)$.

Bleibt zu zeigen: $\#M(x, y, z) = 1$.

Wir definieren

$$\mathcal{H} = \{\text{Halbräume die mindestens zwei Elemente aus } \{x, y, z\} \text{ enthalten}\}$$

Es gilt

$$I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, y) \subseteq \bigcap \mathcal{H}$$

Angenommen es existieren $m_1, m_2 \in I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, y)$ mit $m_1 \neq m_2$. Dann existiert eine Hyperebene H die m_1 und m_2 trennt und genau eins von H^-, H^+ liegt in $\mathcal{H}$. $\square$

Bemerkung 1.1.11. Insbesondere sind Bäume mediane Graphen.

Es gilt auch (ohne Beweis):

Theorem 1.1.12. Sei Γ ein zusammenhängender medianer Graph. Dann existiert ein $CAT(0)$ kubischer Komplex X mit

$$\Gamma \stackrel{Iso}{\cong} X^{(1)}.$$

1.2 Erinnerung: Maßräume

Definition 1.2.1. Sei X eine Menge. Eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen heißt σ -Algebra, wenn gilt

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) Ist $A \in \mathcal{A}$, so gilt: $X - A \in \mathcal{A}$
- (iii) $A_i, i \in \mathbb{N}$, so gilt $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$

Definition 1.2.2. Ein Maß auf einer σ -Algebra ist eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

mit folgenden Eigenschaften

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Sind $A_i \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$$

Definition 1.2.3. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Stufenfunktion**, wenn gilt:

- (i) $f(X) = \{v_1, \dots, v_l\}$
- (ii) $A_i := f^{-1}(v_i) \in \mathcal{A}$
- (iii) $\mu(A_i) < \infty$

Wir setzen

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^l \mu(A_i) v_i$$

und definieren

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu$$

Weiter definieren wir

$$\text{Step}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Stufenfunktion}\}$$

Wir bezeichnen die von der $\|\cdot\|_1$ Halbnorm induzierte Pseudometrik mit pdist_1 . Dann ist $(\text{Step}(X, \mathbb{R}), \text{pdist}_1)$ ein pseudometrischer Raum und $m(f, g, h) \in M(f, g, h)$

$$m(f, g, h)(x) := m_{\mathbb{R}}(f(x), g(x), h(x))$$

für $x \in X$.

1 Einführung: Mediane Räume

Definition 1.2.4. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$ die Menge der Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, für die es eine Cauchyfolge (f_j) in $\text{Step}(X, \mathbb{R})$ gibt, die fast überall gegen f konvergiert. Für so ein f setzen wir

$$\|f\|_1 = \lim \int_X |f_j| d\mu$$

Dann ist $(\mathcal{L}_1(X, \mathbb{R}), \text{pdist}_1)$ ein pseudometrischer medianer Raum.

Wir definieren

$$S^1(X, \mathbb{R}) = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\},$$

wobei χ_A die charakteristische Funktion auf A ist. Der Raum $S^1(X, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}_1(X, \mathbb{R})$ ist ein medianer Unterraum mit

$$m(\chi_A, \chi_B, \chi_C) = \chi_{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$$

Beispiel 1.2.5. (Symmetrische Differenz)

Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum. Sei weiter $A \subseteq X$ Teilmenge. Wir definieren

$$\mathcal{B}_A = \{C \subseteq X \mid A \Delta C := (A - C) \cup (C - A) \in \mathcal{B}, \mu(A \Delta C) < \infty\}$$

und

$$\begin{aligned} \text{pdist} : \mathcal{B}_A \times \mathcal{B}_A &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (C_1, C_2) &\mapsto \mu(C_1 \Delta C_2) \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathcal{B}_A, \text{pdist})$ ein pseudometrischer medianer Raum.

Wir definieren

$$\begin{aligned} \chi^A : \mathcal{B}_A &\rightarrow S^1(X, \mu) \\ B &\mapsto \chi_{A \Delta B} \end{aligned}$$

Die Abbildung χ^A ist eine Isometrie.

Bemerkung 1.2.6. Später werden wir sehen: Sei X ein (pseudo)metrischer Raum. Dann existiert ein Maßraum $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ und eine isometrische Einbettung als medianer Unterraum:

$$X \hookrightarrow S^1(Y, \mu).$$