

Gruppen als geometrische Objekte

Konzept: Wir betrachten Gruppen als Symmetrien von Räumen und untersuchen ihre algebraischen Eigenschaften mittels geometrischer Eigenschaften der Räume auf denen sie wirken

Gruppen

Räume

Satz von Cayley: $G \hookrightarrow \text{Sym}(X)^G$
 $g \mapsto \mathcal{L}_g : x \mapsto gx$ (Linksmultiplikation mit g)

Wir betrachten für X : metrische Räume mit viel Geometrie mit viel Geometrie und strukturerhaltende Abbildungen zwischen diesen, Isometrien $\leadsto \text{Isom}(X)$

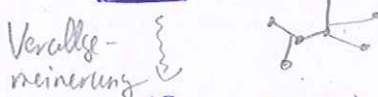
- beschränkte Bahn?
- Fixpunkt?

metrische Räume

Sei $\mathcal{X}$ eine Familie von metrischen Räumen.

$\mathcal{H} - \mathcal{H}$: Hilberträume $(V, \langle -, - \rangle)$
 z.B.: $\mathbb{R}^n, L^2(Y, \mu)$
 ↳ Winkelbegriff
 ↳ Längenbegriff

$\mathcal{A} - \mathcal{A}$: simpliziale Bäume



$\mathcal{C} - \mathcal{C}$: CAT(0)-kubische Komplexe

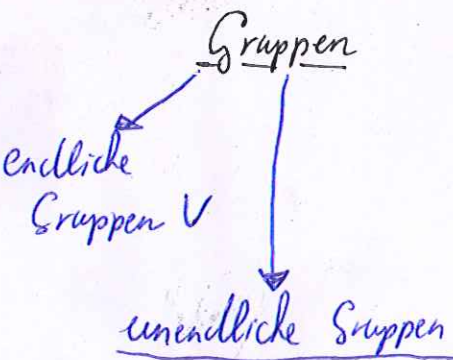
$\mathcal{A}_* - \mathcal{A}_*$: CAT(0)-Räume
 z.B.: $\mathcal{H}, \mathcal{A}$
 bel. Dimension

$\mathcal{M} - \mathcal{M}$: mediane Räume
 z.B.: $L^1(Y, \mu)$
 ↳ beschränkte Bahn

$\mathcal{R}_{mmW} - \mathcal{R}_{mmW}$: Räume mit messbaren Wänden (X, W, B, μ)
 ↳ Ber. $\mu(\omega(x|y)) = \mu(W(x|y))$

(Bemerkung: Wir nehmen immer an, dass die Räume vollständig sind.)

Denn z.B. die Vervollständigung von einem CAT(0)-Raum ist wieder CAT(0) und die Verv. von einem medianen Raum ist wieder median) ①



Ab jetzt:

G ist eine topologische Gruppe (d.h. $(G, \mathcal{T}), \cdot, {}^{-1}$ sind stetig)

- lokal kompakt
 $(\forall g \in G \exists U_g \text{ Umgebung von } g \exists K_g \text{ komp. Ung. von } g \text{ mit } K_g \subseteq U_g)$

↳ lokale Endlichkeitsbedingung

- G hat eine abzählbare Basis der Topologie ($\Rightarrow$ separabel)

↳ aus technischen Gründen

- erst Konstruktion auf G' mit $G' \subseteq G$ und dann Fortsetzung auf G
 dicht und abzählbar

Beispiele: • G endlich erzeugt mit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(G)$

- $GL_n(\mathbb{Z}), SL_n(\mathbb{Z}), \text{Aut}(F_n), \text{SAut}(F_n)$

2. Definition (Kazhdan's Eigenschaft (T))

Sei $\pi: G \rightarrow U(\mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung. Sei $Q \subseteq G$ Teilmenge und $\varepsilon > 0$. Ein Vektor $v \in \mathcal{H} - \{0\}$ heißt (Q, ε) -invariant, falls gilt:

$$\sup_{g \in Q} \|\pi(g)v - v\| < \varepsilon \cdot \|v\|$$

G hat Kazhdan's Eigenschaft (T), falls $Q \subseteq G$ kompakte Teilmenge existiert, so dass gilt:

Jede unitäre Darstellung von G welche (Q, ε) -invariante Vektoren besitzt, hat einen Fixvektor $\neq 0$. (Fastfixvektor $\leadsto$ Fixvektor).

3. Welche algebraischen Eigenschaften folgen aus der Eigenschaft (T)?

Sei G eine diskrete Gruppe mit Kazhdan's Eigenschaft (T). Dann

- G ist endlich erzeugt
- $G^{\text{ab}} = G/[G, G]$ endlich

...

§ Beilngt negativ definite Kerne (BNDK)

4. Definition

Sei X eine Menge. $\Psi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt Kern von X , falls gilt:

- (i) $\Psi(x, y) = \Psi(y, x)$
 - (ii) $\Psi(x, x) = 0$
- $\forall x, y \in X$

Ein Kern heißt BND, falls:

$\forall n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ gilt:

$$\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \Psi(x_i, x_j) \leq 0.$$

Falls $X = G$ Gruppe: Ψ heißt linksinvariant, falls gilt:

$$\Psi(x_1, x_2) = \Psi(gx_1, gx_2) \quad \forall g, x_1, x_2 \in X$$

5. BlackBox

G hat (T) $\Leftrightarrow$ jeder stetige LBNDK von G ist beschränkt

Wir betrachten nun diese Kerne genauer

6. Beispiele

(i) $X=T$ ein Baum, dann ist $d: T \times T \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein BNDK.

(ii) X ein $CAT(0)$ kubischer Komplex, dann ist

$$D: X^{\circ} \times X^{\circ} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \omega(x|y) \text{ BNDK (siehe Phil's Vortrag)}$$

(iii) Sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. Dann ist

$$\psi: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$(x, y) \mapsto \|x - y\|_2^2 = \langle x - y, x - y \rangle \text{ BNDK.}$$

Beweis: Es gilt: $\psi(x, y) = \psi(y, x) \forall x, y \in X$ ✓
 $\psi(x, x) = 0$

Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{H}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \psi(x_i, x_j) &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \|x_i - x_j\|^2 \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j [\|x_i\|^2 - 2 \cdot \langle x_i, x_j \rangle + \|x_j\|^2] \\ &= \underbrace{\sum_j \lambda_j \sum_i x_i}_{=0} \|x_i\|^2 - 2 \underbrace{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle}_{= \langle \sum_i \lambda_i x_i, \sum_i \lambda_i x_i \rangle} + \underbrace{\sum_i \lambda_i \sum_j \lambda_j}_{=0} \|x_j\|^2 \\ &= \underbrace{\| \sum_i \lambda_i x_i \|^2}_{\geq 0} \leq 0 \quad \square \end{aligned}$$

(iv) Sei X eine Menge, $\mathcal{H}$ reeller Hilbertraum und $f: X \rightarrow \mathcal{H}$ Abb.

Dann: $\psi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$(x, y) \mapsto \|f(x) - f(y)\|_2^2 \text{ ein BNDK.}$$

Beweis: folgt aus (iii).

Dieses Beispiel ist universell, siehe Theorem 7.

7. Theorem (BNDK-Konstruktion)

Sei $\Psi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein BNDK. Dann $\exists$ reeller Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathcal{H}$ mit

$$\Psi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_2^2 \quad \forall x, y \in X$$

Beweis:

• Für $x \in X$ sei $\delta_x: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l} x \mapsto 1 \\ y \mapsto 0 \quad y \neq x \end{array}$$

• Wir definieren:

$$V := \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i \delta_{x_i}}_{\text{formale Summe}} \mid \sum_{i=1}^n c_i = 0, n \in \mathbb{N}, x_i \in X \right\}$$

reeller Vektorraum

• Weiter definieren wir:

$$\langle -, - \rangle_\Psi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}, \sum_{j=1}^m b_j \delta_{x_j} \right) \mapsto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \Psi(x_i, x_j)$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } & \langle f, g \rangle_\Psi = \langle g, f \rangle_\Psi \\ & \langle f, f \rangle_\Psi \geq 0 \end{aligned}$$

• Nun betrachten wir:

$$N_\Psi := \{ f \in V \mid \langle f, f \rangle_\Psi = 0 \} \subseteq V$$

Unterraum

$$V/N_\Psi \times V/N_\Psi \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$([f], [g]) \mapsto \langle f, g \rangle_\Psi \text{ Skalarprodukt}$$

• Sei nun $(\mathcal{H}, \langle -, - \rangle_\Psi)$ die Vervollständigung von V/N_Ψ .

lässt sich
fortsetzen, da gleichmäßig
stetig

- Sei $x_0 \in X$ fest.

Wir def.

$$\boxed{f: X \rightarrow \mathcal{H} \\ x \mapsto \delta_x - \delta_{x_0}}$$

(Bem: Wenn X top. Raum, dann ist f stetig)

Es gilt:

$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathcal{H}}^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \|\delta_x - \delta_y\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle \delta_x - \delta_y, \delta_x - \delta_y \rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\underbrace{\Psi(x,x)}_{=0} - \Psi(x,y) - \Psi(y,x) - \underbrace{\Psi(y,y)}_{=0} \right]$$

□

$$= \Psi(x,y)$$

8. Bemerkung

Wenn X separabel ist, dann ist $(\mathcal{H}, \langle -, - \rangle_{\mathcal{H}})$ separabel.
(folgt aus der Konstruktion von $\mathcal{H}$)

9. Satz (Jeder separable Hilbertraum ist ein L^2 Raum)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Dann existiert eine isometrische Einbettung

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{H} &\rightarrow L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \\ &\parallel \uparrow \text{Zählmaß} \\ &= \{ (x_i)_i \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \} \end{aligned}$$

Beweisskizze:

- $\exists$ ONB $(e_i)_i$ von $\mathcal{H}$
- Sei $x \in \mathcal{H}$, dann $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x | e_i \rangle \cdot e_i$
- Definiere $\Phi: \mathcal{H} \rightarrow L^2(\mathbb{N})$
 $x \mapsto (\langle x | e_i \rangle)_i$

10. Satz Black Box (viel Arbeit)

Sei $L^2(Y, \mu)$ gegeben. Dann ex. ein Maßraum (Y', μ') und eine isometrische Einbettung: $L^2(Y, \mu) \hookrightarrow L^2(Y', \mu')$.

Übersetzung von Property (T) in die geometrische Gruppentheorie

Sei $0 \leq p < 2$.

11. Definition: Eine Funktion $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt Kern von ...

a) Kern von Typ p : wenn es einen Maßraum $(Y, \mathcal{B}, \mu)$ und eine Abbildung $f: X \rightarrow L^p(Y, \mu)$ mit $\varphi(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_p^p$ gibt.

b) Kern von medianem Typ: wenn es einen medianen Raum (Y, d) und eine Abb. $f: X \rightarrow Y$ mit $\varphi(x, y) = d(f(x), f(y))$ gibt.

12. Proposition: $\varphi: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist von med. Typ 1 gdw. φ von medianem Typ ist.

Beweis: " $\Rightarrow$ " Sei φ von Typ 1. Da $L^1(Y, \mu)$ ein medianer Raum ist, ist φ von medianem Typ.

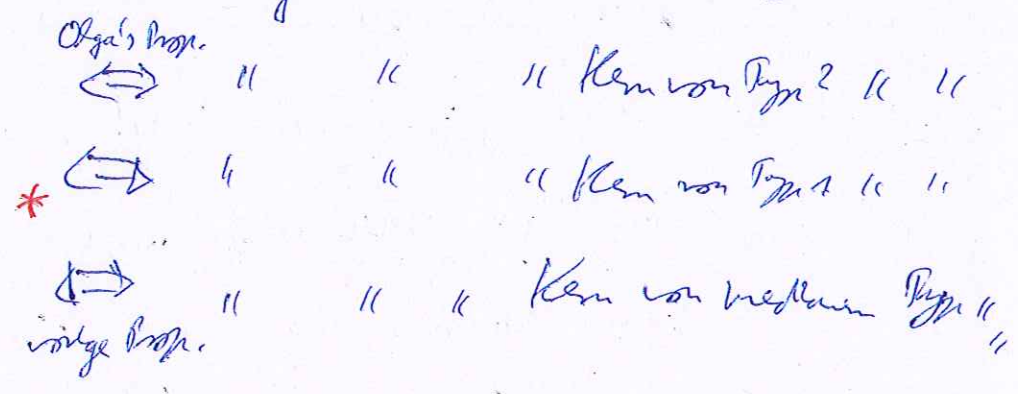
" $\Leftarrow$ " Sei φ von med. Typ.
Wir wissen bereits, dass ein medianer Raum X eine Funktion von einem Raum W in W trägt und sich ^{zählt} daher isometrisch in den $L^1(W, \mu)$ einbetten lässt. Also ist φ von Typ 1. $\square$

$\top$ $W =$ homogene Wände in X , $\mu(W(x, y)) = d(x, y)$ $\top$

$\angle$ $X \hookrightarrow L^1(W, \mu) \subset X \hookrightarrow X_{W(x, y_0)}$ $\angle$

13. Bemerkung: Wir haben folgende Kette von Äquivalenzen:
 (G lokal komp. erfüllt 2. Abz. von)

G hat (T) $\Leftrightarrow$ Jeder stetige Linksim. Kern BNK auf G ist beschränkt.



* Hier benutzen wir das Lemma:

14. Lemma: (1) ψ Kern von Typ p $\Leftrightarrow 0 < p \leq 2 \Rightarrow \psi$ BNK
 (2) ψ BNK, $1 \leq p \leq 2 \Rightarrow \psi^{1/2}$ von Typ p

ψ Typ 1 $\Rightarrow$ BNK $\Rightarrow \psi = \psi^{1/2}$ von Typ 2
 ψ Typ 2 $\Rightarrow$ BNK $\Rightarrow \psi^{1/2}$ von Typ 1

Ziel: $\left(\begin{array}{l} \text{stetige Linksim. Kerne von} \\ \text{medianen Typ auf } G \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{stetige Wdhungen von } G \\ \text{durch Kon. auf medianen Räumen} \end{array} \right)$

15. Theorem: Sei G eine separable (= $\exists$ abzählb. dichte Teilmenge) topologische Gruppe.

(1) Wenn G stetig durch Metriken auf einem medianen Raum (X, d) wirkt, so ist für $x \in X$ die Abl.
 $\psi: G \times G \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\psi(g, g') = d(g \cdot x, g' \cdot x)$ ein stetiger Linksim.

(2) Falls $\psi: G \times G \rightarrow \mathbb{R}_+$ ein linksinv. stetiger Kern
ist mit $\psi = \sqrt{\varphi}$ für einen Kern φ von Typ 2,
dann existiert eine stetige Wirkung von G durch
Isometrien auf einem metrischen Raum (X, d)
und ein Punkt $x \in X$ mit $\psi(g, g') = d(g \cdot x, g' \cdot x)$.

Beweis: zu (1): • $\varphi(hg, hg') = d(hg, hg') = d(h(g \cdot x), h(g' \cdot x))$
 $= d(g \cdot x, g' \cdot x) = \psi(g, g') \Rightarrow \varphi$ linksinv.
 Gruppen.

- φ ist stetig, da $g \mapsto g \cdot x$ und d stetig sind
- φ ist von Typ 1, da sich X isometr.
in L^1 -Raum einbetten lässt

zu (2): Wir benutzen die Aussage für abzählb. Gruppen ohne
Beweis.

Da G separabel ist, enthält G eine dichte, abz.
Teilmenge, Q . Sei $L^2 = \langle Q \rangle$ die von Q erzeugte Untergr.
von G .
Dann ist $L^2 \leq G$ eine dichte, abzählbare Untergruppe.

Nach Voraussetzung ex. eine ^{stetige} isometrische Wirkung
von L^2 auf einem metrischen Raum (X, d) und
 $x \in X$ mit $\psi(g, g') = d(g \cdot x, g' \cdot x)$.

Wir können o.E. annehmen: X ist vollständig.

[Verschl. bleibt metrisch, jede Konv. von X setzt sich eind.
zu Konv. von $\hat{X}$ fort]

$f: L^2 \rightarrow X, g \mapsto g \cdot x$ ist uniform stetig, da φ stetig ist.

X vollst. $\Rightarrow f$ lässt sich erweitern zu stetiger Abb. $G \rightarrow X$

so, dass $\mathcal{E}(g, g') = d(fg, fg')$ immer noch gilt

Wir definieren eine Wirkung auf $f(B)$ durch $g \cdot f(h) = f(g \cdot h)$.
(wohldef.!) Da $\mathcal{E}$ linksinv. ist, definiert dies eine ^(stetige) isom.

Grunderhaltung von G auf $f(B)$.

Problem? Warum noch nicht fertig?

Nun muss man noch zeigen: Die Wirkung lässt sich zu G -Wirkung auf metrischer Stelle fortsetzen.

Beweis des Hauptsatzes 1: Wir haben: G hat (T) $\Leftrightarrow$ Jeder stetige l.in. Kern von Typ 1 auf G ist beschränkt.

Nach Thm. 6.25 (b) induziert eine st. isom. Wirkung von G auf einem met. Raum X einen solchen Kern.

Umgekehrt ist nach Lemma ... jeder Kernst von Typ 1 auch von Typ 2. Also ist $\sqrt{\mathcal{E}}$ induziert durch solche eine stetige isom. Wirkung von G auf einem met. Raum nach Thm. 6.25 (a).

Mit der Bedingung $\mathcal{E}(g, g') = d(g \cdot x, g' \cdot x)$ beacht. $\Leftrightarrow G \cdot x$ beschr.ⁿ folgt die Beh.

□

16. Ausblid: F_n freie Gruppe auf n Erzeugern

Elemente = Wörter in $x_1 \dots x_n, x_1^{-1} \dots x_n^{-1}$

Verkürpfung = Annullierungen (u. evtl. Kürzen)

} Analogie
zu Basis
von VR
nehmen

$\text{Aut}(F_n)$ ist die Gruppe der lg. Gruppenisom. $F_n \rightarrow F_n$.

Offne Frage: Hat $\text{Aut}(F_n), n \geq 4$ Eigenschaft (T)?

(für $n=3$ hat $\text{Aut}(F_n)$ nicht (T))

Da $\mathbb{Z}^n$ die Abelianisierung von F_n ist, haben wir

ind. ind. Abl. $\text{Aut}(F_n) \xrightarrow{\pi} \text{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong GL_n(\mathbb{Z})$

Bsp.: $n=2$

$$x_1 \mapsto x_1 x_2$$

$$x_2 \mapsto x_2^{-1}$$

→ welche Matrix?
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Def.: $\text{SAut}(F_n) := \pi^{-1}(SL_n(\mathbb{Z}))$

2. Offne Frage: Hat $\text{SAut}(F_n)$ (T) für $n \geq 4$?