

## Vortrag 2: Wirkungen auf Bäume, Fixpunkte

Lisa Li

## 1 Vorbemerkungen

**1.1 Notation:** Für zwei Knoten  $P, Q$  eines Baums bezeichnen wir den eindeutigen Weg von  $P$  nach  $Q$  mit  $P - Q$ .

**Bem:** Sei  $\Gamma$  ein Baum und  $s \in \text{Aut}(\Gamma)$ . Für zwei Knoten  $A, B \in V(\Gamma)$  gilt  $s(A - B) = s(A) - s(B)$ .

**Beweis:** Seien  $C_0 = A, C_1, \dots, C_{m-1}, C_m = B$  die Knoten des Weges  $A - B$  und sei  $k_i \in E(\Gamma)$  für  $0 \leq i \leq m$  die Kante, die  $C_i$  und  $C_{i+1}$  verbindet. Dann sind  $s(C_i)$  und  $s(C_{i+1})$  durch  $s(k_i)$  verbunden. Für alle  $i \neq j$  gilt außerdem  $C_i \neq C_j \Rightarrow s(C_i) \neq s(C_j)$ , da  $s$  bijektiv. Damit ist  $s(A - B)$  der Weg von  $s(A)$  nach  $s(B)$ .

**1.2 Definition:** Sei  $G$  eine Gruppe und  $\Gamma$  ein Baum. Eine Wirkung von  $G$  auf  $\Gamma$  ist gegeben durch einen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$ .

**Definition:** Sei  $\Gamma$  ein Baum. Eine Inversion eines Automorphismus  $s \in \text{Aut}(\Gamma)$  ist ein Knotenpaar  $(P, Q) \in V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ , das durch eine Kante verbunden ist, mit der Eigenschaft  $s(P) = Q$  und  $s(Q) = P$ .

Im Folgenden seien alle Automorphismen und Gruppenwirkungen auf Bäumen ohne Inversionen.

Sei  $\Gamma$  ein Baum. Für  $s \in \text{Aut}(\Gamma)$  sei  $\Gamma^s$  die Menge aller Fixpunkte bezüglich  $s$ , d.h.  $V(\Gamma^s) = \{P \in V(\Gamma) \mid s(P) = P\}$ ,  $E(\Gamma^s) = \{k \in E(\Gamma) \mid s(k) = k\}$ . Für eine Gruppe  $G$ , die auf  $\Gamma$  wirkt, bezeichne  $\Gamma^G$  die Menge aller Fixpunkte bezüglich der  $G$ -Wirkung, d.h.  $V(\Gamma^G) = \{P \in V(\Gamma) \mid gP = P \text{ für alle } g \in G\}$ ,  $E(\Gamma^G) = \{k \in E(\Gamma) \mid gk = k \text{ für alle } g \in G\}$ .

### 1.3 Serre's Fixpunkteigenschaft (FA):

Eine Gruppe  $G$  hat die Eigenschaft (FA), wenn gilt:

(FA) Für jeden Baum  $\Gamma$ , auf den  $G$  wirkt, gilt  $\Gamma^G \neq \emptyset$ .

**Behauptung:** Ist  $\Gamma^G \neq \emptyset$ , so ist  $\Gamma^G$  ein Baum.

**Beweis:** Ohne Einschränkung enthält  $\Gamma^G$  mindestens zwei Knoten. Seien  $P, Q \in V(\Gamma^G)$ . Für alle  $g \in G$  gilt dann nach obiger Bemerkung  $g(P - Q) = gP - gQ = P - Q$ . Damit ist  $P - Q$  in  $\Gamma^G$  enthalten,  $\Gamma^G$  ist also zusammenhängend und somit ein Baum.

### Bemerkung:

Gruppen mit Eigenschaft (FA) haben interessante Strukturen. Häufig ist es jedoch nicht einfach zu zeigen, dass eine Gruppe Eigenschaft (FA) hat. Deswegen ist das Ziel dieses Vortrags, Hilfsaussagen für (FA) herzuleiten. Dazu betrachten wir zunächst Automorphismen mit/ohne Fixpunkte, um dann im nächsten Schritt die Aussagen auf Gruppenwirkungen anwenden zu können.

## 2 Automorphismen über Bäume und Fixpunkte

### 2.1 Lemma

Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2$  zwei disjunkte Teilbäume von einem Baum  $\Gamma$ . Sei  $n = d(\Gamma_1, \Gamma_2) := \min \{d(P, Q) \mid P \in V(\Gamma_1), Q \in V(\Gamma_2)\}$ . Dann gibt es genau ein Paar  $(P_1, P_2) \in V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$  mit  $d(P_1, P_2) = n$ .

**Beweis:**

Seien  $(P_1, P_2), (Q_1, Q_2) \in V(\Gamma_1) \times V(\Gamma_2)$  mit  $d(Q_1, Q_2) = n = d(P_1, P_2)$ . Man betrachte den Weg  $c$  von  $Q_1$  nach  $Q_2$ , den man durch Verbinden von  $Q_1 - P_1$  (in  $\Gamma_1$  enthalten),  $P_1 - P_2$  und  $P_2 - Q_2$  (in  $\Gamma_2$  enthalten) enthält. Die Knoten in  $c$  sind paarweise verschieden, denn jeder von  $P_1$  und  $P_2$  verschiedene Knoten in  $P_1 - P_2$  ist weder in  $\Gamma_1$  noch in  $\Gamma_2$  enthalten (sonst gäbe es einen Weg zwischen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , der kürzer als  $P_1 - P_2$  wäre). Damit ist  $c = Q_1 - Q_2$ , also

$$n = d(Q_1 - Q_2) = d(Q_1 - P_1) + \underbrace{d(P_1 - P_2)}_{=n} + d(P_2 - Q_2)$$

$$\Rightarrow d(Q_1 - P_1) = 0 = d(P_2 - Q_2)$$

$$\Rightarrow Q_1 = P_1 \text{ und } P_2 = Q_2$$

### 2.2 Satz

Sei  $\Gamma$  ein Baum und  $s \in \text{Aut}(\Gamma)$  mit  $\Gamma^s \neq \emptyset$ . Sei  $P \in V(\Gamma)$  beliebig.

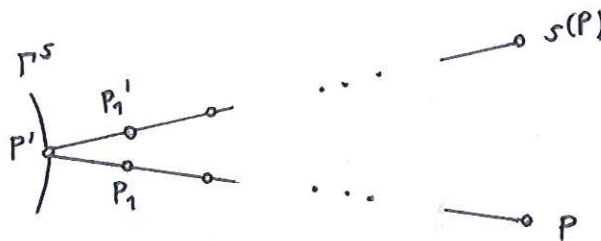
- Sei  $P' \in V(\Gamma^s)$  mit  $d(P, P') = \min \{d(P, Q) \mid Q \in V(\Gamma^s)\}$ . Dann erhält man  $P - s(P)$  durch Verbinden der Wege  $P - P'$  und  $P' - s(P) = s(P' - P)$ .
- Der Mittelpunkt  $M$  von  $P - s(P)$  (d.h.  $M$  ist der Knoten in  $P - s(P)$  mit  $d(P, M) = d(M, s(P))$ ) ist ein Fixpunkt von  $s$ .

**Beweis**

zu a): Es ist  $s(P' - P) = \underbrace{s(P')}_{=P'} - s(P)$ .

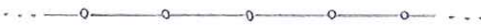
Für  $d(P, P') = 0$  ist die Aussage wegen  $P = P' = s(P)$  klar. Nun sei also  $d(P, P') > 0$ .

Skizze:



Sei  $P_1$  der Knoten in  $P' - P$  mit  $d(P', P_1) = 1$  und  $P'_1$  der Knoten in  $P' - s(P)$  mit  $d(P', P'_1) = 1$ . Dann ist  $P'_1 = s(P_1) \neq P_1$ , da ansonsten  $P_1 \in V(\Gamma^s)$  mit  $d(P_1, P) < d(P', P)$ . Damit enthält der Weg von  $P$  nach  $s(P)$ , den man durch Verbinden der Wege  $P - P'$  und  $P' - s(P)$  erhält, paarweise verschiedene Knoten, ist also gleich dem Weg  $P - s(P)$ .

zu b): Nach a) ist  $M = P' \in V(\Gamma^s)$  der Mittelpunkt von  $P - s(P)$ .

**Definition:** gerader Weg 

## 2.3 Satz (Tits)

Sei  $s$  ein Automorphismus über einen Baum  $\Gamma$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

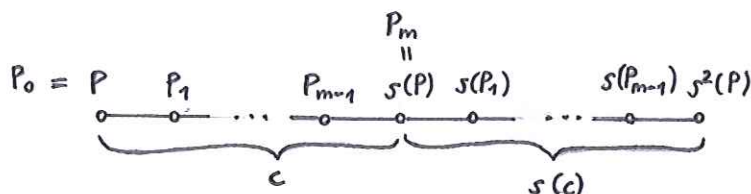
- a)  $s$  hat keinen Fixpunkt.
- b) Es gibt einen geraden Weg  $T$  in  $\Gamma$  mit  $s(T) = T$  und  $s$  induziert eine echte Translation auf  $T$ .

**Bem:** Für jeden geraden Weg  $W$  in  $\Gamma$  mit  $s(W) = W$  gilt  $W = T$ .

**Beweis:**

a)  $\Rightarrow$  b): Sei  $m = \inf \{d(P, s(P)) \mid P \in V(\Gamma)\}$  und  $T = \{P \in V(\Gamma) \mid d(P, s(P)) = m\}$ . Wir wollen zeigen, dass  $T$  die Knotenmenge eines geraden Weges mit den Eigenschaften in b) ist. Sei  $P \in T$  und seien  $P_0 = P, P_1, \dots, P_m = s(P)$  die Knoten von  $c = P - s(P)$ . Da  $s$  keinen Fixpunkt hat, ist  $m > 0$ .

Skizze:



Durch Verbinden von  $c$  und  $s(c)$  erhält man einen Weg. Denn sonst gilt  $P_{m-1} = s(P_1)$ .

1. Fall:  $m = 1$

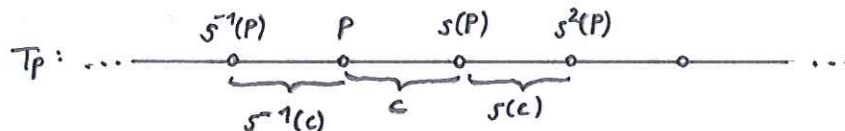
Es gilt  $P_0 = s(P_1)$  und  $P_1 = s(P_0)$  ( $P_m = s(P)$ ).  $s$  hat damit eine Inversion, ein Widerspruch.

2. Fall:  $m \geq 2$

Hier gilt  $d(P_1, \underbrace{s(P_1)}_{=P_{m-1}}) = m-2 < m = \inf \{d(P, s(P)) \mid P \in V(\Gamma)\}$ , Widerspruch.

Damit erhält man durch Verbinden von  $c$  und  $s(c)$  den Weg  $P - s^2(P)$ . Induktiv folgt, dass durch Verbinden aller  $s^n(c)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) ein gerader Weg entsteht.

Skizze:



Sei  $T_p$  dieser Weg. Es gilt  $s(T_p) = T_p$  und  $s$  verschiebt  $T_p$  um  $m > 0$ .

Sei nun  $Q \in V(\Gamma)$  beliebig und sei  $P' \in T_p$  mit  $d(P', Q) = \min \{d(V, Q) \mid V \in T_p\} =:$

a. Dann enthält der Weg aus  $Q - P'$ ,  $P' - s(P')$ ,  $s(P') - s(Q)$  paarweise verschiedene Knoten.

Skizze:



Denn ansonsten gilt entweder  $A = P'_1$  oder  $s(A) = P'_{m-1}$ . Im ersten Fall folgt  $A \in T_p$  und im zweiten Fall  $s(A) \in T_p \Rightarrow A \in T_p$ , was wegen  $d(A, Q) < a$  zum Widerspruch führt. Damit folgt  $d(Q, s(Q)) = a + m + a = 2a + m$ . Nun gilt  $Q \in T \Leftrightarrow d(Q, s(Q)) = m \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow Q \in T_p$ , also  $T = T_p$ .

b)  $\Rightarrow$  a): Angenommen,  $s$  hat einen Fixpunkt. Für alle  $P \in V(\Gamma)$  ist der Mittelpunkt von  $P - s(P)$  nach Satz 2.2b) ein Fixpunkt von  $s$ . Damit ist kein gerader Weg in  $s$  mit der Eigenschaft b) möglich.

zur Bem: Sei  $U = \{\Gamma' \subset \Gamma \text{ Teilbaum} \mid s(\Gamma') = \Gamma' \text{ und } s^{-1}(\Gamma') = \Gamma'\}$ . Für den oben konstruierten Weg  $T = T_p$  gilt  $T = \bigcap U$ , denn:

„ $\supset$ “: Es gilt  $s(T) = T$  und  $s^{-1}(T) = T$  (siehe oben), also  $T \in U$ .

„ $\subset$ “: Sei  $\Gamma' \in U$ . Sei  $Q \in V(\Gamma')$  beliebig. Da  $s(Q) \in V(\Gamma')$ , enthält  $\Gamma'$  den Weg  $Q - s(Q)$  und damit auch  $P' - s(P')$  (Notation wie oben).  $T$  entsteht durch Verbinden der Wege  $s^n(P' - s(P'))$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), also gilt  $T \subset \Gamma'$ . Insgesamt  $T \subset U$ .

Sei nun  $W$  ein gerader Weg in  $\Gamma$  mit  $s(W) = W$ . Dann gilt auch  $s^{-1}(W) = W$ . Also folgt  $W \in U \Rightarrow W \supset \bigcap U = T \Rightarrow W = T$  (denn:  $W$  und  $T$  sind gerade Wege).

### 3 Gruppenwirkungen und Fixpunkte

#### 3.1 Satz

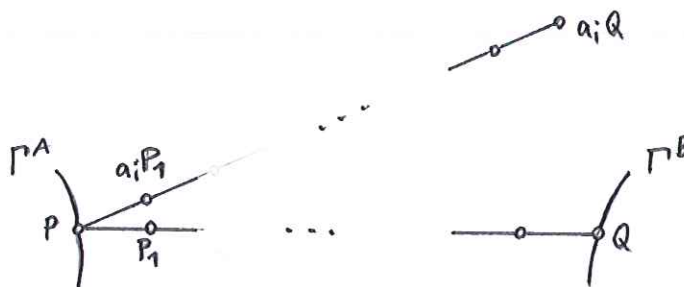
Sei  $G$  eine Gruppe, die von Elementen  $a_i, i \in I$  und  $b_j, j \in J$  erzeugt wird. Sei  $A = \langle \{a_i \mid i \in I\} \rangle$  und  $B = \langle \{b_j \mid j \in J\} \rangle$ . Wenn  $G$  auf einen Baum  $\Gamma$  wirkt mit  $\Gamma^A \neq \emptyset, \Gamma^B \neq \emptyset$  und so, dass für alle  $(i, j) \in I \times J$  der Automorphismus  $a_i b_j$  einen Fixpunkt hat, dann hat  $G$  einen Fixpunkt (d.h.  $\Gamma^G \neq \emptyset$ ).

#### Beweis

Es ist  $\Gamma^G = \Gamma^A \cap \Gamma^B$ . („ $\supset$ “: Sei  $x \in V(\Gamma^A \cap \Gamma^B)$ , d.h.  $ax = x$  für alle  $a \in A$ , und  $bx = x$  für alle  $b \in B$ . Sei  $g \in G$  beliebig. Dann lässt sich  $g$  schreiben als  $g = c_1 \cdot \dots \cdot c_n$  mit  $c_k \in A \cup B$ . Es folgt  $gx = (c_1 \dots c_n)x = c_1 \dots c_n x = x$ . Also  $x \in V(\Gamma^G)$ . Genauso:  $E(\Gamma^A \cap \Gamma^B) \subset E(\Gamma^G)$ )

Angenommen,  $\Gamma^A \cap \Gamma^B = \emptyset$ . Seien  $P \in V(\Gamma^A), Q \in V(\Gamma^B)$  mit  $d(P, Q) = d(\Gamma^A, \Gamma^B)$  (s. Lemma 2.1). Sei  $P_1$  der Knoten in  $P - Q$  mit  $d(P, P_1) = 1$ . Dann ist  $P_1 \notin V(\Gamma^A)$ , da  $d(P_1, Q) < d(P, Q)$ . Das heißt, es gibt  $i \in I$  mit  $a_i P_1 \neq P_1$ .

Skizze:



Der Weg, den man durch Verbinden von  $Q - P$  und  $P - a_i Q = a_i(P - Q)$  enthält, ist damit der Weg  $Q - a_i Q$  mit Mittelpunkt  $P$ . Sei nun  $j \in J$  beliebig. Es gilt  $a_i Q = a_i b_j Q$ , da  $Q \in V(\Gamma^B)$ , und somit  $Q - a_i b_j Q = Q - a_i Q$ . Nach Voraussetzung hat  $a_i b_j$  einen Fixpunkt. Daher folgt mit Satz 2.2b): der Mittelpunkt  $P$  von  $Q - a_i b_j Q$  ist ein Fixpunkt von  $a_i b_j$ , d.h.  $a_i b_j P = P \Rightarrow b_j P = a_i^{-1} P = P$  (da  $P \in V(\Gamma^A)$ ). Folglich ist  $P$  ein Fixpunkt von  $b_j$  für alle  $j \in J$ , ein Widerspruch zu  $P \notin V(\Gamma^B)$ . Also  $\Gamma^G = \Gamma^A \cap \Gamma^B \neq \emptyset$ .

#### 3.2 Nilpotente Gruppen

**Definition:** Eine Gruppe  $G$  heißt nilpotent, wenn es Normalteiler  $G_i \triangleleft G, 0 \leq i \leq k$ , mit  $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_k = G$  und  $G_i/G_{i-1} \subseteq Z(G/G_{i-1})$  für alle  $1 \leq i \leq k$  gibt.

**Eigenschaften (ohne Beweis):**

1) In der obigen Definition können für endlich erzeugte, nilpotente Gruppen  $G$  die Normalteiler  $G_i \triangleleft G$  so gewählt werden, dass  $G_i/G_{i-1}$  zyklisch ist.

- 2) Nilpotente nichttriviale Gruppen haben nichttriviales Zentrum.  
 3) Sei  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Gruppenhomomorphismus. Ist  $G$  nilpotent, so ist auch  $\varphi(G)$  nilpotent.

### 3.3 Satz

Sei  $G$  eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe, die auf einen Baum  $\Gamma$  wirkt. Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

- a)  $G$  hat einen Fixpunkt.  
 b) Es gibt einen geraden Weg  $T$  in  $\Gamma$ , der unter  $G$  stabil bleibt, und einen nichttrivialen Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ , so dass jedes  $g \in G$  den geraden Weg  $T$  um  $\varphi(g)$  verschiebt.

#### Beweis

a) und b) schließen sich gegenseitig aus, denn angenommen, es gilt b). Sei  $g \in G$  so, dass  $g$  als echte Translation auf  $T$  wirkt. Nach Satz 2.3 hat  $g$  keinen Fixpunkt, und damit auch  $G$  nicht.

Außerdem ist im Fall b) der gerade Weg  $T$  nach Satz 2.3 eindeutig bestimmt.

Spezialfall:  $G = \langle g \rangle$  zyklisch

Hat  $g$  einen Fixpunkt  $x \in V(\Gamma)$ , so ist  $x$  Fixpunkt von  $G$ . Hat  $g$  keinen Fixpunkt, dann lässt sich wie in Satz 2.3 ein gerader Weg mit den Eigenschaften in b) konstruieren.

Allgemeiner Fall: Nun seien  $G_i \triangleleft G$  mit  $\{1\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n = G$ , so dass  $G_i/G_{i-1}$  für  $1 \leq i \leq n$  zyklisch ist. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach  $n$ :

(IA):  $n = 0 \Rightarrow G = \{1\} \Rightarrow$  Fall a)

(IS): Sei nun  $n \geq 1$ . Nach (IV) gilt für  $H = G_{n-1}$  eine der beiden Fälle:

Fall a)

Die Gruppe  $G/H$  ist zyklisch und wirkt auf den Baum  $\Gamma^H$  ( $\Gamma^H \neq \emptyset$ ). Denn  $\Gamma^H$  bleibt stabil unter  $G$ : Sei  $P \in V(\Gamma^H)$ ,  $g \in G$  beliebig. Für alle  $h \in H$  gibt es  $h' \in H$  mit  $hg = gh'$  ( $H \triangleleft G$ ), also  $h(gP) = gh'P = gP \Rightarrow gP \in V(\Gamma^H)$ . Analog für  $E(\Gamma^H)$ . Zusammen mit der  $G$ -Wirkung  $G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$  erhält man einen Homomorphismus  $\psi : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma^H)$ . Da  $H \subseteq \ker(\psi)$ , liefert der Homomorphiesatz einen Homomorphismus  $\psi' : G/H \rightarrow \text{Aut}(\Gamma^H)$ ,  $\psi'(gH) = \psi(g)$ .

Nach obigem Spezialfall gilt für  $G/H$  eine der beiden Fälle:

- a1)  $G/H$  hat einen Fixpunkt  $x$ . Dann ist  $x$  ein Fixpunkt von  $G$ .  
 a2) Es gibt einen geraden Weg  $T$  in  $\Gamma^H$ , der stabil unter  $G/H$  ist, und damit auch unter  $G$ . Außerdem gibt es nach Voraussetzung  $gH \in G/H$  so, dass  $gH$  und

somit auch  $g$  als nichttriviale Translation auf  $T$  wirkt.

Fall b)

Sei  $T$  der eindeutige gerade Weg in  $\Gamma$ , der unter  $H$  stabil bleibt (siehe b)). Dann bleibt  $T$  auch unter  $G$  stabil: Sei  $g \in G$ . Dann gibt es für alle  $h \in H$  wegen  $H \triangleleft G$  ein  $h' \in H$  mit  $hg = gh'$ , also  $h(gT) = g(h'T) = gT$ . Aufgrund der Eindeutigkeit von  $T$  folgt  $gT = T$ .

In den Fällen a2) und b) existiert also ein gerader Weg  $T$ , der unter  $G$  stabil bleibt, und damit ein Homomorphismus  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(T)$ , wobei  $\alpha(G)$  eine echte Translation enthält. Identifiziert man die Knoten von  $T$  mit  $\mathbb{Z}$ , so hat ein  $f \in \text{Aut}(T)$  die Form  $f(z) = z + n$  oder  $f(z) = -z + n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$  (denn  $f$  ist durch  $f(0)$  und  $f(1)$  festgelegt und:  $f(0) = n \Rightarrow f(1) = n - 1$  oder  $f(1) = n + 1$ ). Sei  $g_1 \in \alpha(G)$  mit  $g_1(z) = z + n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$  (existiert, s.o.). Angenommen, es gibt ein  $g_2 \in \alpha(G)$  mit  $g_2(z) = -z + m$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ . Dann folgt  $Z(\alpha(G)) = \{\text{id}\}$ , denn für ein  $h \in \alpha(G)$ ,  $h \neq \text{id}$ , gilt  $h \circ g_1 \neq g_1 \circ h$ , falls  $h(z) = z + n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , und  $h \circ g_2 \neq g_2 \circ h$ , falls  $h(z) = -z + n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Dies führt aber zum Widerspruch, da  $\alpha(G)$  nilpotent ist (s. Eigenschaften 2), 3)). Damit enthält  $\alpha(G)$  nur Translationen und ist damit zyklisch: Es gibt ein  $f \in \alpha(G)$ ,  $f(z) = z + n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha(G) = \langle f \rangle = \{f^k \in \text{Aut}(T) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  ( $f^k(z) = z + kn$ ). Sei  $k(g) \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha(g) = f^{k(g)}$ . Dann ist  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $g \mapsto n \cdot k(g)$  der in b) gesuchte Homomorphismus.

### 3.4 Korollar

Sei  $\Gamma$  ein Baum und  $G$  eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe, die auf  $\Gamma$  wirkt. Seien  $g_1, \dots, g_n \in G$  mit  $G = \langle \{g_1, \dots, g_n\} \rangle$ . Wenn  $g_i$  für jedes  $1 \leq i \leq n$  einen Fixpunkt hat, so hat auch  $G$  einen Fixpunkt.

#### Beweis

Angenommen,  $G$  hat keinen Fixpunkt. Wir erhalten einen nichttrivialen Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$  wie in Satz 3.5b). Dann gibt es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\varphi(g_i) \neq 0$ . Nach Satz 2.3 kann  $g_i$  keinen Fixpunkt haben.