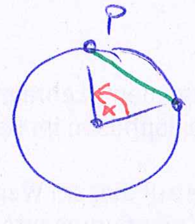
CAT(0)-Räume

<u>Sei (X,d) ein metrischer Raum.</u> Eine <u>Geodätische</u> ist eine Abbildung $c:[a,b]\to X$ mit $d(c(s),c(t))=|s-t|$ für alle $s,t\in[a,b]$. Wir nennen X <u>geodätisch</u>, wenn alle $p,q\in X$ durch eine Geodätische verbindbar sind.

<u>Bsp</u>: $(V,|.|)$ normierter Vektorraum. Geodätische $c(t)=p+~~tt~~(q-p)\frac{t}{|p-q|}$ von p nach q.

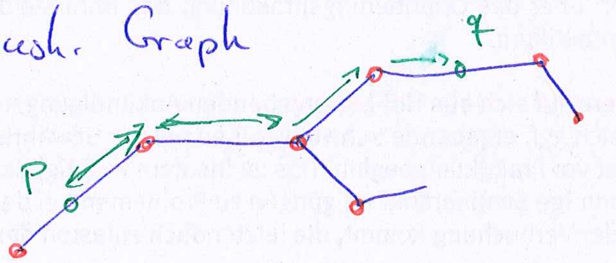
$d_2(p,q)=|p-q|_2$

- ~~Bsp~~ Sei $\mathbb{E}^n=\mathbb{R}^n$ mit euklidischer Norm, $|u|_2=(\sum u_i^2)^{\frac{1}{2}}$
- $S^1\subseteq\mathbb{E}^2$ nicht geodätisch bzgl. euklid. Metrik, aber geodätisch mit <u>Winkelmetrik</u>



$d_w(p,q)=\angle_0(p,q)=\alpha$

- Γ zush. Graph



<u>Def</u> Sei ~~o~~ $o,p,q\in X$. Wegen der Dreiecksungleichung gibt es $\bar o,\bar p,\bar q\in\mathbb{E}^2$ mit

$$d(o,p)=d_2(\bar o,\bar p)$$
$$d(p,q)=d_2(\bar p,\bar q)$$
$$d(q,o)=d_2(\bar q,\bar o)$$

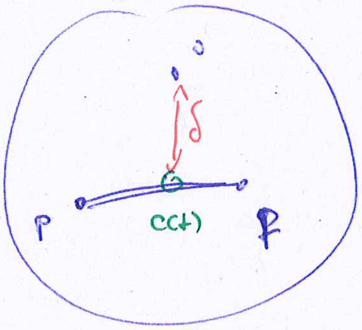
~~Wir~~ Wir nennen $\bar o,\bar p,\bar q$ <u>Vergleichsdreieck</u> zu o,p,q.

Ein geodätischer ~~xxx~~ metrischer Raum X heißt <u>CAT(0)-Raum</u>, wenn für alle $o,p,q\in X$ Folgendes gilt.

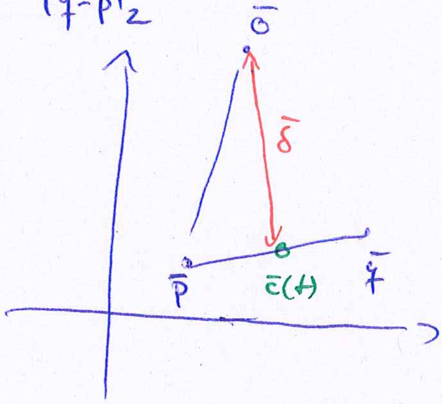
Ist $\bar o, \bar p, \bar q \in \mathbb{E}^2$ Vergleichsdreieck und ist
$c : [0,l] \to X$ Geodätische von p und q ($l = d(p,q)$)
so gilt für alle $t \in [0,l]$

$$d(o, c(t)) \le d_2(\bar o, \bar c(t))$$

$$\bar c(t) = p + (q-p)\frac{t}{|q-p|_2}$$



X



$\mathbb{E}^2$

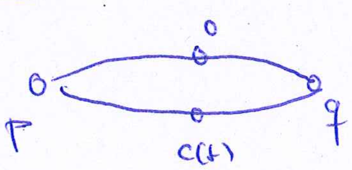
$\delta \le \bar\delta$

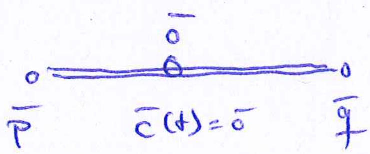
(Cartan - Alexandrov - Toponogov)

Beispiel • $\mathbb{E}^n$ ist CAT(0) (bzgl. euklid. Metrik)

allgemein: jeder Hilbertraum ist CAT(0), sogar:
ein Banachraum V ist CAT(0) $\Leftrightarrow$ V ist Hilbertraum.

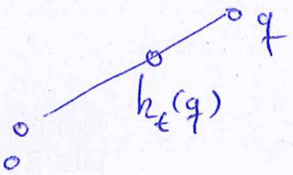
Satz Geodätische in CAT(0)-Räumen sind eindeutig.





$\Rightarrow$ S^1 mit Winkelmetrik ist nicht CAT(0),
Graph CAT(0) $\Rightarrow$ Baum.

Fakten (1) CAT(0)-Räume sind <u>zusammenziehbar</u>



$$h_t(q) = c(t \cdot l) \qquad l = d(p,q)$$

c Geodätische von o nach q

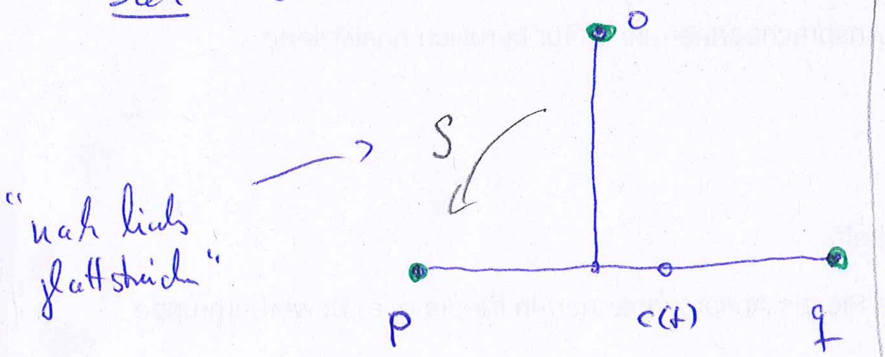
$$h_0 = id_X \qquad h_1(q) = o$$

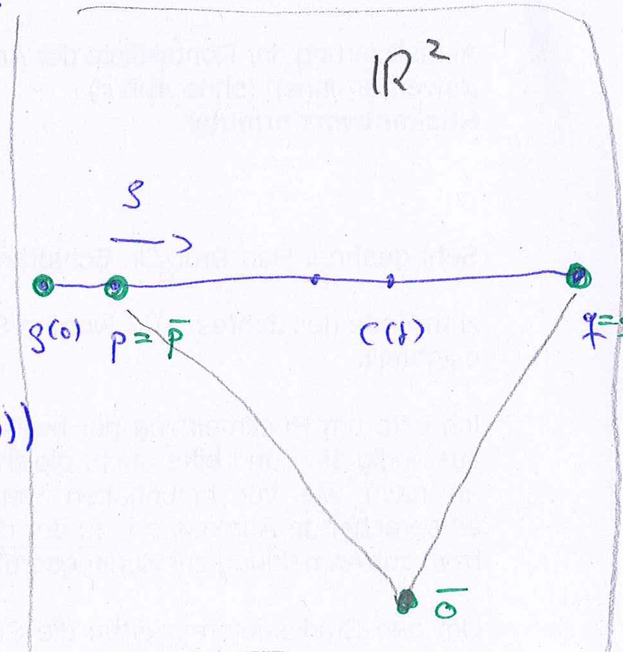
(2) X CAT(0) $\Rightarrow$ Vervollständigung X^* ist auch CAT(0) (?)

(3) X, Y CAT(0) $\Leftrightarrow$ $X \times Y$ CAT(0) mit Metrik

$$d = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2}$$

Satz Jeder Baum ist CAT(0).





$$d(o, c(t)) = d(o, s(c(t)))$$

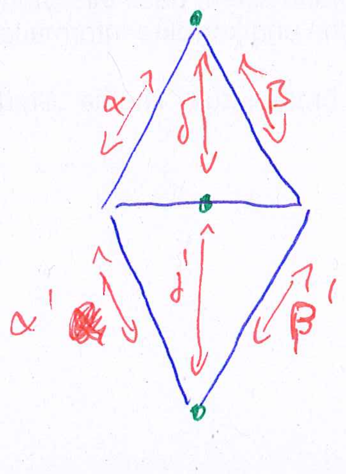
$$d_2(\bar{q}, \bar{o}) = d(q, o)$$

$$d_2(\bar{p}, \bar{o}) \geq d_2(\bar{p}, s(o))$$

$$\Rightarrow \quad d_2(c(t), \bar{o}) \geq d_2(c(t), s(o)) = d(c(t), o)$$

$\uparrow$

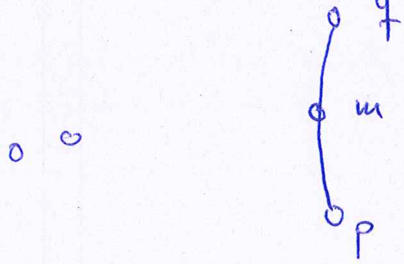
Geometrie in der Ebene



$\alpha \leq \alpha'$ und $\beta \leq \beta'$

$\Rightarrow \delta \leq \delta'$

Bem Sei X CAT(0). Dann gilt für alle $o, p, q \in X$, m Mittelpunkt von p, q:



$$d(o,m)^2 \le \frac{1}{2}\left(d(o,p)^2 + d(o,q)^2\right) - \frac{1}{4} d(p,q)^2$$

(denn das stimmt in $\mathbb{E}^2$)

Def Sei X metr. Raum, $A \subseteq X$ beschränkt. Der Radius von A ist $\mathrm{rad}(A) = \inf\{r > 0 \mid \text{es gibt } p \in X \text{ mit } A \subseteq \overline{B}_r(p)\}$

wo $\overline{B}_r(p) = \{q \mid d(p,q) \le r\}$

Satz Ist X ein vollständiger CAT(0)-Raum und ist $A \subseteq X$ beschränkt mit $r = \mathrm{rad}(A)$, so gibt es genau ein $p \in X$ mit $A \subseteq \overline{B}_r(p)$, das Zentrum p von A.

Eindeutigkeit p, q Zentren, $o \in A$ beliebig

$$\Rightarrow d(o,m)^2 \le r^2 - \frac{1}{4} d(p,q) \Rightarrow d(p,q) = 0$$

Existenz Wähle $p_i \in X$ mit $A \subseteq \overline{B}_{r+\frac{1}{i}}(p_i)$. Für $o \in A$

$$\frac{1}{4} d(p_i, p_j) \le \frac{1}{2}\left((r+\tfrac{1}{i})^2 + (r+\tfrac{1}{j})^2 - d(o, m_{ij})^2\right.$$

$$\le \frac{1}{2}\left(2r^2 + \frac{2r}{i} + \frac{2r}{j} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2}\right) - r^2$$

$$\le 2r\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j}\right) + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{j^2} < \varepsilon$$

für ~~[illegible]~~ $i, j \ge n \gg 1 \Rightarrow$ Cauchy-Folge.

Korollar (Bruhat-Tits Fixpunktsatz)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe, die isometrisch auf X wirkt (d.h. $d(p,q) = d(g(p), g(q))$ für alle $p,q \in X$, $g \in G$).

Wenn G einen beschränkten Bahn in X hat, so hat G einen Fixpunkt in X. Insbesondere hat G einen Fixpunkt in X, wenn G endlich ist.

Beweis: Sei $q \in X$ mit $A = G(q)$ beschränkt.

Sei p Zentrum von A. Für jedes $g \in G$ ist $g(A) = A$, also $g(p) = p$ (weil Zentrum eindeutig und weil g Isometrie ist) $\square$