Räume mit messbaren Wänden

1. Erinnerung an Beispiele medianer Räume

(a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $(\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R}), \text{pdist})$ ein pseudometrischer, medianer Raum, wobei pdist die durch die Pseudonorm $\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu$ induzierte ~~die~~ Pseudometrik und $m(f,g,h) \in M(f,g,h)$ definiert durch $m(f,g,h)(x) = m_{\mathbb{R}}(f(x), g(x), h(x))$ für $f,g,h \in \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ ist.

Insbesondere ist $S^1(X, \mathbb{R}) = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ ein medianer Unterraum und es gilt:

$m(\chi_A, \chi_B, \chi_C) = \chi_{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)}$.

(b) Sei ~~$(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.~~ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum, $A \subseteq X$ beliebig. Definiere

$\mathcal{B}_A = \{C \subseteq X \mid A \triangle C \in \mathcal{B}, \mu(A \triangle C) < \infty\}$ und weiter

$\text{pdist}: \mathcal{B}_A \times \mathcal{B}_A \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (C_1, C_2) \mapsto \mu(C_1 \triangle C_2)$ eine Pseudometrik und die Abbildung

$$\chi^A : \mathcal{B}_A \longrightarrow S^1(X, \mathbb{R})$$
$$C \longmapsto \chi_{A \triangle B}$$

eine Isometrie, sodass $(\mathcal{B}_A, \text{pdist})$ ein pseudometrischer, medianer Raum ist.

2. Räume mit messbaren Wänden

<u>Ziel des Vortrags:</u> • Räume mit messbaren Wänden einführen

• Korrespondenz zwischen Räumen mit messbaren Wänden ~~und~~ und medianen Räumen untersuchen und feststellen, dass durch jeden Raum mit messbaren Wänden X ein mediane Raum $\mathcal{M}(X)$ gegeben ist (sodass $X \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ isometrisch ist)

Insgesamt wird Folgendes Theorem bewiesen:

<u>Theorem</u> Sei $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$ ein Raum mmW.

(i) $\mathcal{M}(X)$ ist ein medianer (Raum) (Unterraum von $\mathcal{B}_X^{\mathcal{H}}$)

(ii) Jede Homomorphismus zwischen Räumen mmW $\Phi: X \to X'$ zwischen X und einem weiteren Raum mmW X' induziert eine Isometrie $\mathcal{M}(\Phi): \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X')$

<u>Später</u> Jeder mediane Raum X besitzt messbare Wände.

<u>Definition</u> Sei X eine Menge und $X = h \dot\cup h^c$ eine Partition von X. Man nennt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine <u>Menge von Halbräumen</u>, wenn für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt: $h^c \in \mathcal{H}$ und $W_{\mathcal{H}} = \{\{h, h^c\} \mid h \in \mathcal{H}\}$ <u>Ansammlung von Wänden</u>. Die Elemente von $W_{\mathcal{H}}$ nennen wir <u>Wände.</u>

Seien $A, B \subseteq X$, $A \cap B = \emptyset$. Dann trennt $w = \{h, h^c\}$ A und B, wenn $A \subseteq h$ und $B \subseteq h^c$ gilt. Man setzt $W(A|B) = \{w \in W_{\mathcal{H}} \mid w \text{ trennt } A \text{ und } B\}$ und für $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$: $W(A|A) = \emptyset$.

<u>Definition (Raum mmW)</u>

Ein <u>Raum mmW</u> ist ein 4-Tupel $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$, wobei W eine Ansammlung von Wänden, $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf W und μ ein Maß auf W ist, sodass für alle $x, y \in X$ gilt: $W(x|y) \in \mathcal{B}$, $\mu(W(x|y)) < \infty$

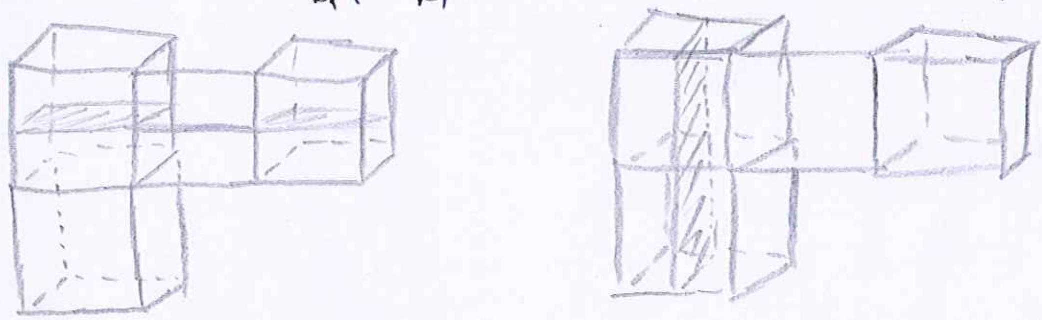
Falls $\mathcal{B} = \mathcal{P}(W)$ und μ das Zählmaß ist, nennen wir (X, W) <u>diskreten Raum mit Wänden.</u>

Bemerkung Wir können auf Räumen mmW eine Pseudometrik $pdist_\mu$ durch $pdist_\mu = \mu(W(x|y))$ definieren.

Beweis $pdist_\mu(x,x) = 0$, $pdist_\mu(x,y) = pdist_\mu(y,x)$ klar. Für $x,y,z \in X$ gilt $pdist_\mu(x,z) = \mu(W(x|z)) = \mu(W(x,y|z) \,\dot\cup\, W(x|y,z))$
$= \mu(W(x,y|z)) + \mu(W(x|y,z)) \leq \mu(W(y|z)) + \mu(W(x|y))$
$= pdist_\mu(y,z) + pdist_\mu(x,y)$ ∎

3. Bsp (kubische Komplexe)

Erinnerung an den Vortrag aus kubische Komplexe: Es gibt Äquivalenzrelation, die einen kubischen Komplex C in zwei Halbräume U_H^+, U_H^- aufteilt. (durch die Äquivalenzklasse H)



Dadurch bekommt man eine Ansammlung von Wänden $W_C = \{\{U_H^+, U_H^-\} \mid H \in C/\sim\}$
Betrachte die σ-Algebra $\mathcal{B} := \mathcal{P}(W_C)$ und das Maß $\mu: \mathcal{B} \to [0,\infty]$
$\mu(A) = \#A$. Damit ist $(C^{(0)}, W_C)$ ein diskrete Raum mit Wänden und für $x,y \in C^{(0)}$ gilt wie schon vorher $pdist_\mu(x,y) = \mu(W(x|y))$
$= \# W(x|y) = d_{C^{(1)}}(x,y)$. Also ist $pdist_\mu$ sogar eine Metrik.

4. Homomorphismen zwischen Räumen mmW

Seien $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$, $(X', W', \mathcal{B}', \mu')$ zwei Räume mmW.

Def Die Abb. $\Phi: X \to X'$ heißt Homomorphismus (zwischen Räumen mmW), wenn gilt:
(i) Für alle $w' = \{h', h'^c\} \in W'$ ist $\{\Phi^{-1}(h'), \Phi^{-1}(h'^c)\} \in W$
(ii) Die Abb. $\Phi_*: W' \to W$ def durch $w' = \{h', h'^c\} \mapsto \{\Phi^{-1}(h'), \Phi^{-1}(h'^c)\}$ ist surjektiv und für alle $B \in \mathcal{B}$ ist $\Phi_*^{-1}(B) \in \mathcal{B}'$ und es gilt $\mu'(\Phi_*^{-1}(B)) = \mu(B)$

Klar: Jede Homomorphismus induziert eine Isometrie zwischen $(X, pdist_\mu)$ und $(X', pdist_{\mu'})$

Bemerkung

Betrachte für eine Menge von Halbräumen $\mathcal{H}$, die durch W festgelegt wird, die Abb. $\pi: \mathcal{H} \longrightarrow W \quad h \mapsto \{h, h^c\}$. π ist surjektiv und $\mathcal{B}^{\mathcal{H}} := \{\pi^{-1}(x) \mid x \in \mathcal{B}\}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{H}$, sodass auf $\mathcal{H}$, das durch π induzierte Maß μ_π betrachtet werden kann.

Definition Man nennt $\sigma \subseteq \mathcal{H}$ zulässig, wenn Folgendes gilt:

(i) Für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt: ($h \in \sigma$ oder $h^c \in \sigma$) und $\{h, h^c\} \not\subseteq \sigma$

(ii) Für alle $h \in \sigma$ und $h' \in \mathcal{H}$ mit $h' \supseteq h$ gilt: $h' \in \sigma$

und für $x \in X$: $\sigma_x := \{h \in \mathcal{H} \mid x \in h\}$. Klar: σ_x ist zulässig.

Bemerkung Es gilt $\pi(\sigma_x \Delta \sigma_y) = W(x|y)$

Bew $\pi(\sigma_x \Delta \sigma_y) = \pi(\{h \in \mathcal{H} \mid \substack{x \in h \text{ oder } y \in h \\ \text{und } \{x,y\} \not\subseteq h}\})$

$= \{w = \{h, h^c\} \in W \mid \text{Entweder } x \in h \text{ und } y \in h^c \text{ oder } y \in h \text{ und } x \in h^c\}$

$= W(x|y)$ ∎

Es ist dadurch also klar, wie die Pseudometrik $pdist_\mu$ auf $\mathcal{H}$ übertragen werden kann (nämlich: $pdist_{\mu_\pi}(x,y) = \mu_\pi(\sigma_x \Delta \sigma_y)$).

5. Isometrische Einbettung eines Raumes mmW in einen medianen Raum

Satz Sei $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$ ein Raum mmW, $x_0 \in X$ fest. Dann ist die Abbildung $I: X \to S^1(W, \mu) \quad x \mapsto \chi_{W(x|x_0)}$ eine isometrische Einbettung.

Beweis siehe Ausarbeitung. ∎

Def Sei $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$ ein Raum mmW und $x_0 \in X$. Definiere

$\mathcal{B}^{\mathcal{H}}_{\sigma_{x_0}} := \{A \subseteq \mathcal{H} \mid A \Delta \sigma_{x_0} \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}} \text{ und } \mu_\pi(A \Delta \sigma_{x_0}) < \infty\}$

(vgl. Bsp 1.b)

<u>Bem</u> $\mathcal{B}^{\mathcal{H}}_{\sigma_{x_0}}$ ist unabhängig von der Wahl von x_0

<u>Bew</u> Seien $x_0, x_1 \in X$ und $A \Delta \sigma_{x_0} \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}}$. Da $\mu_{\mathcal{H}}(\sigma_{x_0} \Delta \sigma_{x_1}) < \infty$ und $(A \Delta \sigma_{x_0}) \Delta (\sigma_{x_1} \Delta \sigma_{x_0}) = A \Delta \sigma_{x_1}$ folgt $A \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}}_{\sigma_{x_1}}$ ∎

Folglich bezeichne diesen Raum mit $\mathcal{B}^{\mathcal{H}}_X$.

<u>Konvention</u> $\overline{\mathcal{M}(X)} := \{\sigma \subseteq \mathcal{H} \mid \sigma \text{ zulässig}\}$.

$\mathcal{M}(X) := \overline{\mathcal{M}(X)} \cap \mathcal{B}^{\mathcal{H}}_X$

Es gilt $\sigma_x \in \mathcal{M}(X)$ für alle $x \in X$ und somit ist durch $\iota: X \to \mathcal{M}(X)$ $x \mapsto \sigma_x$ eine isometrische Einbettung gegeben.

<u>Beweis des Theorems</u>

<u>Zu (i)</u> Sei $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathcal{M}(X)^3$ und setze $m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) := (\sigma_1 \cap \sigma_2) \cup (\sigma_1 \cap \sigma_3) \cup (\sigma_2 \cap \sigma_3)$

Zu zeigen: $m \in \mathcal{M}(X)$. Es gilt offenbar $m \in \overline{\mathcal{M}(X)}$. Es reicht also $m \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}}_X$ zu zeigen. Betrachte dafür die Abb.

$\chi^{x_0}: \mathcal{B}^{\mathcal{H}}_X \to S^1(\mathcal{H}, \mu_{\mathcal{H}})$ $A \mapsto \chi_{A \Delta \sigma_{x_0}}$. Da $S^1(\mathcal{H}, \mu_{\mathcal{H}})$ ein mediane Raum ist, reicht es $m(\chi^{x_0}(\sigma_1), \chi^{x_0}(\sigma_2), \chi^{x_0}(\sigma_3)) = \chi^{x_0}(m)$ zu zeigen. Vereinfachung: Für mengentheoretische Betrachtung de char. Fkt betrachte eine Abb zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sodass

$\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$, $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B$, $\chi_{A \cup B} = \chi_A \cdot \chi_B + \chi_A + \chi_B$

gilt. Es ist $\chi_{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} = \chi_A \cdot \chi_B + \chi_A \cdot \chi_C + \chi_B \cdot \chi_C$

und somit $m(\chi^{x_0}(\sigma_1), \chi^{x_0}(\sigma_2), \chi^{x_0}(\sigma_3))$

$= \chi_{((\sigma_1 \Delta \sigma_{x_0}) \cap (\sigma_2 \Delta \sigma_{x_0})) \cup ((\sigma_1 \Delta \sigma_{x_0}) \cap (\sigma_3 \Delta \sigma_{x_0})) \cup ((\sigma_2 \Delta \sigma_{x_0}) \cap (\sigma_3 \Delta \sigma_{x_0}))}$

$= \chi_{\sigma_1} \cdot \chi_{\sigma_2} + \chi_{\sigma_1} \cdot \chi_{\sigma_3} + \chi_{\sigma_2} \cdot \chi_{\sigma_3} + \chi_{\sigma_{x_0}}$

$= \chi_{((\sigma_1 \cap \sigma_2) \cup (\sigma_1 \cap \sigma_3) \cup (\sigma_2 \cap \sigma_3)) \Delta \sigma_{x_0}} = \chi^{x_0}(m)$

$\Rightarrow m \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}}_X$

Zu (ii) Sei $\Phi: X \to X'$ ein beliebiger Homomorphismus zwischen Räumen mmW.
Betrachte $\Phi^*: W' \twoheadrightarrow W$ $w = \{h', h'^c\} \mapsto \{\Phi^{-1}(h'), \Phi^{-1}(h'^c)\}$. Dadurch wird eine Abbildung $\Psi^*: \mathcal{H}' \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ $h' \mapsto \Phi^{-1}(h')$ induziert, sodass für alle $B \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}}$ gilt $\Psi^{*-1}(B) \in \mathcal{B}^{\mathcal{H}'}$ und $\mu_{\pi'}((\Psi^{*-1}(B)) = \mu_\pi B$.
Definiere nun $\mathcal{M}(\Phi): \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X')$ $\sigma \mapsto \Psi^{*-1}(\sigma)$ $= \{h' \in \mathcal{H}' \mid \Phi^{-1}(h') \in \sigma\}$. Zeige, dass $\mathcal{M}(\Phi)$ wohldefiniert ist.
Sei dafür zunächst $\sigma \subseteq \mathcal{H}$ zulässig. Dann ist $\mathcal{M}(\Phi)(\sigma)$ $= \Psi^{*-1}(\sigma) = \{h' \in \mathcal{H}' \mid \Phi^{-1}(h') \in \sigma\} = \{h' \in \mathcal{H} \mid h' \in \Phi(\sigma)\}$ zulässig.
und für σ_x gilt $\mathcal{M}(\Phi)(\sigma_x) = \sigma_{\Phi(x)}$ und $\mathcal{M}(\Phi)(\sigma \Delta \sigma')$ $= \mathcal{M}(\Phi)(\sigma) \Delta \mathcal{M}(\Phi)(\sigma')$. Sei also $A \in \mathcal{B}_X^{\mathcal{H}}$. Dann ist für alle $x \in X$ $A \Delta \sigma_x$ endlich messbar und da $\mathcal{M}(\Phi)(A \Delta \sigma_x) = \mathcal{M}(\Phi)(A) \Delta \sigma_{\Phi(x)}$ $\in \mathcal{B}^{\mathcal{H}'}$ ist $\mathcal{M}(\Phi)(A) \in \mathcal{B}_X^{\mathcal{H}'}$. Also ist $\mathcal{M}(\Phi)$ wohldefiniert.
Für das eingeschränkte Maß μ_π auf $\mathcal{M}(X)$ ~~gilt dann~~ bzw $\mu_{\pi'}$ auf $\mathcal{M}(X')$ gilt dann:

$$\mathrm{pdist}_{\mu_{\pi'}}(\mathcal{M}(\Phi)(\sigma), \mathcal{M}(\Phi)(\sigma')) = \mu_{\pi'}(\mathcal{M}(\Phi)(\sigma) \Delta \mathcal{M}(\Phi)(\sigma'))$$
$$= \mu_{\pi'}(\mathcal{M}(\Phi)(\sigma \Delta \sigma')) = \mu_{\pi'}(\Psi^{*-1}(\sigma \Delta \sigma')) = \mu_\pi(\sigma \Delta \sigma') = \mathrm{pdist}_{\mu_\pi}(\sigma, \sigma') \quad \blacksquare$$

<u>Korollar</u> Die Gruppe der Automorphismen von X $\mathrm{Aut}\, X$ wirkt durch Isometrien auf $\mathcal{M}(X)$. $\blacksquare$

<u>Rückgriff</u> Man kann zeigen, dass $c: C^{(0)} \to \mathcal{M}(C^{(0)})$ eine Isometrie ist.

Anhang (Beweis des Satzes aus 5.)

Mit der bereits geleisteten Vorarbeit ist es uns möglich I über folgende Kompositionen von Abbildungen zu definieren:

$$I : X \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B}_X^{\mathcal{H}} \xrightarrow{\beta} S^1(\mathcal{H}, \mu_\pi) \xrightarrow{\gamma} S^1(W, \mu)$$

$$x \longmapsto \sigma_x \longmapsto \chi_{\sigma_x \Delta \sigma_{x_0}} \longmapsto \chi_{W(x|x_0)}$$

I ist nun isometrisch, wenn alle Verknüpfungen isometrisch sind. γ ist per Definition isometrisch. Reicht also, die Isometrieeigenschaft von $\beta \circ \alpha$ zu prüfen. Seien dafür $x, y \in X$ beliebig. Dann ist

$$\| \chi_{\sigma_x \Delta \sigma_{x_0}} - \chi_{\sigma_y \Delta \sigma_{x_0}} \| = \| \chi_{(\sigma_x \Delta \sigma_{x_0}) \Delta (\sigma_y \Delta \sigma_{x_0})} \|$$

$$= \| \chi_{\sigma_x \Delta \sigma_y} \| = \mu_\pi(\sigma_x \Delta \sigma_y) = \mu(W(x|y)) = \mathrm{pdist}(x,y).$$

$\blacksquare$