

Simpliziale Bäume

Cora Welsch

Seminar SS2015 WWU Münster

- abstrakter Simplicialkomplex
- Geometrische Realisierung
- Bäume
- Wirkung auf einen Baum

Definition (abstrakter Simplicialkomplex)

Ein *abstrakter Simplicialkomplex* K besteht aus einer Eckenmenge V und einer Menge Σ von endlichen Teilmengen s von V , sodass gilt:

- (1) jede Menge die aus genau einer Ecke besteht ist in Σ
- (2) $t \subseteq s$ und $s \in \Sigma$, dann ist auch $t \in \Sigma$.

Definition (abstrakter Simplicialkomplex)

Ein *abstrakter Simplicialkomplex* K besteht aus einer Eckenmenge V und einer Menge Σ von endlichen Teilmengen s von V , sodass gilt:

- (1) jede Menge die aus genau einer Ecke besteht ist in Σ
- (2) $t \subseteq s$ und $s \in \Sigma$, dann ist auch $t \in \Sigma$.

Die Elemente in Σ werden *Simplizes* genannt, wobei ein n -Simplex eine Teilmenge bestehend aus $n + 1$ Ecken ist.

Ist $t \subseteq s$, dann wird t als *Seite* von s bezeichnet.

Definition (abstrakter Simplicialkomplex)

Ein *abstrakter Simplicialkomplex* K besteht aus einer Eckenmenge V und einer Menge Σ von endlichen Teilmengen s von V , sodass gilt:

- (1) jede Menge die aus genau einer Ecke besteht ist in Σ
- (2) $t \subseteq s$ und $s \in \Sigma$, dann ist auch $t \in \Sigma$.

Die Elemente in Σ werden *Simplizes* genannt, wobei ein n -Simplex eine Teilmenge bestehend aus $n + 1$ Ecken ist.

Ist $t \subseteq s$, dann wird t als *Seite* von s bezeichnet.

Beispiel und Gegenbeispiele

Sei $V = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Für $\Sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}\}$ ist $K = (V, \Sigma)$ ein Simplicialkomplex

Definition (abstrakter Simplicialkomplex)

Ein *abstrakter Simplicialkomplex* K besteht aus einer Eckenmenge V und einer Menge Σ von endlichen Teilmengen s von V , sodass gilt:

- (1) jede Menge die aus genau einer Ecke besteht ist in Σ
- (2) $t \subseteq s$ und $s \in \Sigma$, dann ist auch $t \in \Sigma$.

Die Elemente in Σ werden *Simplizes* genannt, wobei ein n -Simplex eine Teilmenge bestehend aus $n + 1$ Ecken ist.

Ist $t \subseteq s$, dann wird t als *Seite* von s bezeichnet.

Beispiel und Gegenbeispiele

Sei $V = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Für $\Sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}\}$ ist $K = (V, \Sigma)$ ein Simplicialkomplex
- Für $\Sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist (V, Σ) kein Simplicialkomplex

Definition (abstrakter Simplicialkomplex)

Ein *abstrakter Simplicialkomplex* K besteht aus einer Eckenmenge V und einer Menge Σ von endlichen Teilmengen s von V , sodass gilt:

- (1) jede Menge die aus genau einer Ecke besteht ist in Σ
- (2) $t \subseteq s$ und $s \in \Sigma$, dann ist auch $t \in \Sigma$.

Die Elemente in Σ werden *Simplices* genannt, wobei ein n -Simplex eine Teilmenge bestehend aus $n + 1$ Ecken ist.

Ist $t \subseteq s$, dann wird t als *Seite* von s bezeichnet.

Beispiel und Gegenbeispiele

Sei $V = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Für $\Sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}\}$ ist $K = (V, \Sigma)$ ein Simplicialkomplex
- Für $\Sigma = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}\}$ ist (V, Σ) kein Simplicialkomplex
- Für $\Sigma = \{\{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$ ist (V, Σ) kein Simplicialkomplex

Definition

Ein abstrakter Simplicialkomplex wird als *endlich* bezeichnet, wenn Σ endlich ist.

Die *Dimension* eines n -Simplizes ist n , die Dimension eines Simplicialkomplexes K ist $\sup\{\dim(s) \mid s \in \Sigma\}$.

Definition

Ein abstrakter Simplicialkomplex wird als *endlich* bezeichnet, wenn Σ endlich ist.

Die *Dimension* eines n -Simplizes ist n , die Dimension eines Simplicialkomplexes K ist $\sup\{\dim(s) \mid s \in \Sigma\}$.

Beispiele für abstrakte Simplicialkomplexe

- Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist $K = \{s \subset \mathbb{Z} \mid |s| \leq n + 1\}$ ein n -dimensionaler unendlicher Simplicialkomplex.

Definition

Ein abstrakter Simplicialkomplex wird als *endlich* bezeichnet, wenn Σ endlich ist.

Die *Dimension* eines n -Simplexes ist n , die Dimension eines Simplicialkomplexes K ist $\sup\{\dim(s) \mid s \in \Sigma\}$.

Beispiele für abstrakte Simplicialkomplexe

- Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist $K = \{s \subset \mathbb{Z} \mid |s| \leq n + 1\}$ ein n -dimensionaler unendlicher Simplicialkomplex.
- $K = \{s \subset \mathbb{N} \mid |s| \in \mathbb{N}\}$ ist ein unendlichdimensionaler Simplicialkomplex.

Definition

Ein abstrakter Simplicialkomplex wird als *endlich* bezeichnet, wenn Σ endlich ist.

Die *Dimension* eines n -Simplexes ist n , die Dimension eines Simplicialkomplexes K ist $\sup\{\dim(s) \mid s \in \Sigma\}$.

Beispiele für abstrakte Simplicialkomplexe

- Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist $K = \{s \subset \mathbb{Z} \mid |s| \leq n + 1\}$ ein n -dimensionaler unendlicher Simplicialkomplex.
- $K = \{s \subset \mathbb{N} \mid |s| \in \mathbb{N}\}$ ist ein unendlichdimensionaler Simplicialkomplex.
- Jede partiell geordnete Menge P kann man zu einem Simplicialkomplex machen. Die Elemente von P sind die Ecken und jede endliche Kette von P ist ein Simplex.

Definition (Unterkomplex)

Ein *Unterkomplex* L eines abstrakten Simplicialkomplexes K ist eine Teilmenge von K die selber ein Simplicialkomplex ist.

Definition (Unterkomplex)

Ein *Unterkomplex* L eines abstrakten Simplicialkomplexes K ist eine Teilmenge von K die selber ein Simplicialkomplex ist.

Beispiele für Unterkomplexe von K

- $K^n = \{s \in K \mid \dim(s) \leq n\}$ ist Unterkomplex von K und wird als n -Skelett bezeichnet.

Definition (Unterkomplex)

Ein *Unterkomplex* L eines abstrakten Simplicialkomplexes K ist eine Teilmenge von K die selber ein Simplicialkomplex ist.

Beispiele für Unterkomplexe von K

- $K^n = \{s \in K \mid \dim(s) \leq n\}$ ist Unterkomplex von K und wird als n -Skelett bezeichnet.
- Sei s ein Simplex in K , dann ist $\bar{s} = \{t \in K \mid t \subseteq s\}$ ein Unterkomplex.

Definition (Unterkomplex)

Ein *Unterkomplex* L eines abstrakten Simplicialkomplexes K ist eine Teilmenge von K die selber ein Simplicialkomplex ist.

Beispiele für Unterkomplexe von K

- $K^n = \{s \in K \mid \dim(s) \leq n\}$ ist Unterkomplex von K und wird als n -Skelett bezeichnet.
- Sei s ein Simplex in K , dann ist $\bar{s} = \{t \in K \mid t \subseteq s\}$ ein Unterkomplex.
- Sei s ein Simplex in K , dann ist $\dot{s} = \{t \in K \mid t \subset s\}$ ein Unterkomplex.

Definition (Geometrische Realisierung)

Die *geometrische Realisierung* $|K|$ eines abstrakten Simplicialkomplexes K ist die Menge aller Funktionen $\alpha : K^0 \rightarrow [0, 1]$, sodass gilt:

- (1) für jedes α ist $\text{supp}(\alpha) := \{v \in K^0 \mid \alpha(v) \neq 0\}$ ein Simplex in K
- (2) für jedes α gilt $\sum_{v \in K^0} \alpha(v) = 1$.

Definition (Geometrische Realisierung)

Die *geometrische Realisierung* $|K|$ eines abstrakten Simplicialkomplexes K ist die Menge aller Funktionen $\alpha : K^0 \rightarrow [0, 1]$, sodass gilt:

- (1) für jedes α ist $\text{supp}(\alpha) := \{v \in K^0 \mid \alpha(v) \neq 0\}$ ein Simplex in K
- (2) für jedes α gilt $\sum_{v \in K^0} \alpha(v) = 1$.

Definition

Sei s ein n -Simplex in einem abstrakten Simplicialkomplex K . Das abgeschlossene Simplex $|s|$ ist dann definiert durch

$$|s| := \{\alpha \in |K| \mid \alpha(v) \neq 0 \Rightarrow v \in s\} = \{\alpha \in |K| \mid \text{supp}(\alpha) \subseteq s\}.$$

Beispiel

Die zum abstrakten Simplicialkomplex $K = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ gehörende geometrische Realisierung

$$|K| = \{\alpha_\lambda \mid \alpha_\lambda(x) = \lambda, \alpha_\lambda(y) = 1 - \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Beispiel

Die zum abstrakten Simplicialkomplex $K = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ gehörende geometrische Realisierung

$$|K| = \{\alpha_\lambda \mid \alpha_\lambda(x) = \lambda, \alpha_\lambda(y) = 1 - \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

und die abgeschlossenen Simplexes $|s|$ der Simplexes $s \in K$ sind

$$|\{x\}| = \{\alpha_1\}, \quad |\{y\}| = \{\alpha_0\} \quad \text{und} \quad |\{x, y\}| = |K|.$$

Beispiel

Die zum abstrakten Simplicialkomplex $K = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ gehörende geometrische Realisierung

$$|K| = \{\alpha_\lambda \mid \alpha_\lambda(x) = \lambda, \alpha_\lambda(y) = 1 - \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

und die abgeschlossenen Simplexes $|s|$ der Simplexes $s \in K$ sind

$$|\{x\}| = \{\alpha_1\}, |\{y\}| = \{\alpha_0\} \text{ und } |\{x, y\}| = |K|.$$

Veranschaulichung

Für ein n -Simplex s ist $|s|$ bijektiv zu der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, \sum x_i = 1\},$$

die die konvexe Hülle der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Definition (Graph)

Ein *ungerichteter Graph* Γ ist ein Paar (V, E) , wobei V eine Menge an Ecken ist und E Menge von Kanten, die eine Teilmenge der Menge aller zweielementigen Teilmengen von V ist.

Definition (Graph)

Ein *ungerichteter Graph* Γ ist ein Paar (V, E) , wobei V eine Menge an Ecken ist und E Menge von Kanten, die eine Teilmenge der Menge aller zweielementigen Teilmengen von V ist.

Bemerkung

Damit ist ein ungerichteter Graph ein 1-dimensionaler Simplicialkomplex.

Definition (Graph)

Ein *ungerichteter Graph* Γ ist ein Paar (V, E) , wobei V eine Menge an Ecken ist und E Menge von Kanten, die eine Teilmenge der Menge aller zweielementigen Teilmengen von V ist.

Bemerkung

Damit ist ein ungerichteter Graph ein 1-dimensionaler Simplicialkomplex.

Es kann Ecken geben, die zu keiner Kante gehören, aber nie Kanten dessen Ecken nicht vorhanden sind. Schleifen, Kanten von einer Ecke zu sich selbst, gibt es auch nicht.

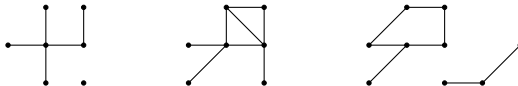


Abbildung: Graphen

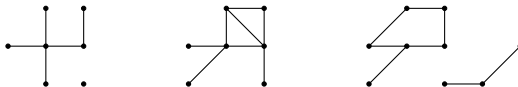


Abbildung: Graphen

Definition (Weg, Kreis, wegzusammenhängend)

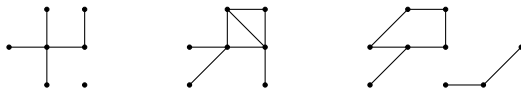


Abbildung: Graphen

Definition (Weg, Kreis, wegzusammenhängend)

Eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken $v_1, \dots, v_n$ in einem Graph Γ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(\Gamma)$ ist ein *Weg*.

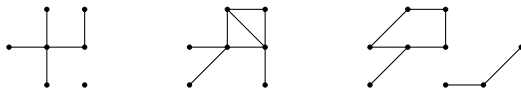


Abbildung: Graphen

Definition (Weg, Kreis, wegzusammenhängend)

Eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken $v_1, \dots, v_n$ in einem Graph Γ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(\Gamma)$ ist ein *Weg*.

Ist $v_1 = v_n$ und sonst keine Ecke doppelt, so nennt man die Folge von Ecken *Kreis* der Länge $n - 1$.

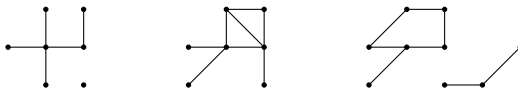


Abbildung: Graphen

Definition (Weg, Kreis, wegzusammenhängend)

Eine Folge von paarweise verschiedenen Ecken $v_1, \dots, v_n$ in einem Graph Γ mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(\Gamma)$ ist ein *Weg*.

Ist $v_1 = v_n$ und sonst keine Ecke doppelt, so nennt man die Folge von Ecken *Kreis* der Länge $n - 1$.

Ein Graph Γ heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Ecke aus Γ einen Weg gibt.

Definition (Baum)

Ein *Baum* T ist ein wegzusammenhängender Graph ohne Kreise der Länge n mit $n \geq 3$.

Definition (Baum)

Ein *Baum* T ist ein wegzusammenhängender Graph ohne Kreise der Länge n mit $n \geq 3$.

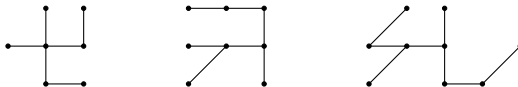


Abbildung: Bäume

Definition (Gruppenwirkung)

Eine *Gruppenwirkung* einer Gruppe $(G, \cdot)$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\cdot : G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto g \cdot m,$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) $(g \cdot h) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$ für alle $g, h \in G$ und $m \in M$
- (2) $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$.

Definition (Gruppenwirkung)

Eine *Gruppenwirkung* einer Gruppe $(G, \cdot)$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\cdot : G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto g.m,$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) $(g \cdot h).m = g.(h.m)$ für alle $g, h \in G$ und $m \in M$
- (2) $1.m = m$ für alle $m \in M$.

Beispiele

- Die symmetrische Gruppe $\text{Sym}(n)$ wirkt auf der Menge $M = \{1, 2, \dots, n\}$ durch Permutationen. Für $\sigma \in \text{Sym}(n)$ ist dann $\sigma.m = \sigma(m)$

Definition (Gruppenwirkung)

Eine *Gruppenwirkung* einer Gruppe $(G, \cdot)$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\cdot : G \times M \rightarrow M, (g, m) \mapsto g \cdot m,$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

- (1) $(g \cdot h) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$ für alle $g, h \in G$ und $m \in M$
- (2) $1 \cdot m = m$ für alle $m \in M$.

Beispiele

- Die symmetrische Gruppe $\text{Sym}(n)$ wirkt auf der Menge $M = \{1, 2, \dots, n\}$ durch Permutationen. Für $\sigma \in \text{Sym}(n)$ ist dann $\sigma \cdot m = \sigma(m)$
- Eine Gruppe $(G, \cdot)$ wirkt auf sich selbst durch Multiplikation $g \cdot m = g \cdot m$ und durch Konjugation $g \cdot m = gmg^{-1}$.

Bemerkung

Eine Gruppenwirkung von G auf M kann auch als Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ betrachtet werden, wobei $\phi(g) : M \rightarrow M$, $m \mapsto \phi(g)(m) = g.m$ ist.

Bemerkung

Eine Gruppenwirkung von G auf M kann auch als Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ betrachtet werden, wobei $\phi(g) : M \rightarrow M$, $m \mapsto \phi(g)(m) = g.m$ ist.

Wie sieht $\text{Aut}(M)$ aus, wenn M ein Baum ist?

Dadurch, dass die Kanten durch ihre Ecken bestimmt sind, ist eine Permutation der Kanten eines Baumes durch die Permutation der Ecken definiert.

Bemerkung

Eine Gruppenwirkung von G auf M kann auch als Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ betrachtet werden, wobei $\phi(g) : M \rightarrow M$, $m \mapsto \phi(g)(m) = g.m$ ist.

Wie sieht $\text{Aut}(M)$ aus, wenn M ein Baum ist?

Dadurch, dass die Kanten durch ihre Ecken bestimmt sind, ist eine Permutation der Kanten eines Baumes durch die Permutation der Ecken definiert. Nicht jede Permutation der Ecken gibt uns allerdings den ursprünglichen Baum wieder. Um das zu gewährleisten machen wir den Baum T zu einen metrischen Raum.

Bemerkung

Eine Gruppenwirkung von G auf M kann auch als Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(M)$ betrachtet werden, wobei $\phi(g) : M \rightarrow M$, $m \mapsto \phi(g)(m) = g.m$ ist.

Wie sieht $\text{Aut}(M)$ aus, wenn M ein Baum ist?

Dadurch, dass die Kanten durch ihre Ecken bestimmt sind, ist eine Permutation der Kanten eines Baumes durch die Permutation der Ecken definiert. Nicht jede Permutation der Ecken gibt uns allerdings den ursprünglichen Baum wieder. Um das zu gewährleisten machen wir den Baum T zu einem metrischen Raum. Wir identifizieren dazu jede Kante mit dem Intervall $[0, 1]$. Der Abstand von zwei Punkten auf einer Kante ist dann durch die Betragsmetrik auf dem Intervall gegeben.

Der Abstand zwischen zwei Ecken x, y in Baum T , die durch den Weg $p = x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$ verbunden sind, sei dann $d(x, y) = n - 1$.

Ist M ein Baum T , dann ist $\text{Aut}(M)$ die Menge aller bijektiven Isometrien von T . Ist T endlich ist $\text{Aut}(T) = \text{Isom}(T)$.

Definition (Isometrie)

Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ zwischen zwei metrischen Räumen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) heißt *Isometrie*, wenn für alle $x, y \in M_1$ gilt:

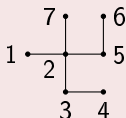
$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$$

Definition (Isometrie)

Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ zwischen zwei metrischen Räumen (M_1, d_1) , (M_2, d_2) heißt *Isometrie*, wenn für alle $x, y \in M_1$ gilt:

$$d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$$

Beispiel



Für $f : (T, d) \rightarrow (T, d)$ wird durch
 $f(1) = 7, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5, f(6) = 6, f(7) = 1$ eine
Isometrie auf dem abgebildeten Baum T definiert.

$\text{Isom}(T)$

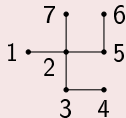


Abbildung: Baum T

$\text{Isom}(T)$

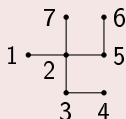


Abbildung: Baum T

Die Menge der Isometrien auf T ist

$\text{Isom}(T) = \{f_1 = id, f_2 = (17), f_3 = (35)(46), f_4 = (17)(35)(46)\}$ für $f_i \in \text{Sym}(7)$.

$\text{Isom}(T)$

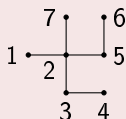


Abbildung: Baum T

Die Menge der Isometrien auf T ist

$\text{Isom}(T) = \{f_1 = id, f_2 = (17), f_3 = (35)(46), f_4 = (17)(35)(46)\}$ für $f_i \in \text{Sym}(7)$.

Die Menge $\text{Isom}(T)$ zusammen mit der Abbildungsverknüpfung ist eine Gruppe.

$\text{Isom}(T)$

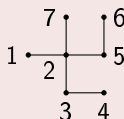


Abbildung: Baum T

Die Menge der Isometrien auf T ist

$\text{Isom}(T) = \{f_1 = id, f_2 = (17), f_3 = (35)(46), f_4 = (17)(35)(46)\}$ für $f_i \in \text{Sym}(7)$.

Die Menge $\text{Isom}(T)$ zusammen mit der Abbildungsverknüpfung ist eine Gruppe.

$\phi : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Isom}(T)$ mit $\phi((1,0)) = f_2$, $\phi((0,1)) = f_3$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Damit wirkt also $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ auf den Baum T .

$\text{Isom}(T)$

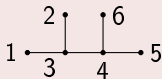


Abbildung: Baum T

$\text{Isom}(T)$

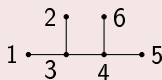


Abbildung: Baum T

Die Isometrien auf T sind $f_1 = id$, $f_2 = (12)$, $f_3 = (56)$, $f_4 = (12)(56)$, $f_5 = (15)(26)(34)$, $f_6 = (16)(25)(34)$, $f_7 = (1625)(34)$, $f_8 = (1526)(34)$ für $f_i \in \text{Sym}(6)$.

$\text{Isom}(T)$

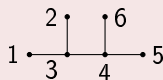


Abbildung: Baum T

Die Isometrien auf T sind $f_1 = id$, $f_2 = (12)$, $f_3 = (56)$, $f_4 = (12)(56)$, $f_5 = (15)(26)(34)$, $f_6 = (16)(25)(34)$, $f_7 = (1625)(34)$, $f_8 = (1526)(34)$ für $f_i \in \text{Sym}(6)$.

$\phi : D_4 \rightarrow \text{Isom}(T)$ mit $\phi(a) = f_5$, $\phi(b) = f_7$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Damit wirkt also die Diedergruppe D_4 auf den Baum T .

$\text{Isom}(T)$

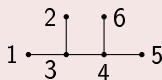


Abbildung: Baum T

Die Isometrien auf T sind $f_1 = id$, $f_2 = (12)$, $f_3 = (56)$, $f_4 = (12)(56)$, $f_5 = (15)(26)(34)$, $f_6 = (16)(25)(34)$, $f_7 = (1625)(34)$, $f_8 = (1526)(34)$ für $f_i \in \text{Sym}(6)$.

$\phi : D_4 \rightarrow \text{Isom}(T)$ mit $\phi(a) = f_5$, $\phi(b) = f_7$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Damit wirkt also die Diedergruppe D_4 auf den Baum T .

Eine Diedergruppe D_n für $n > 2$ ist die Isometriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks und besteht aus n Drehungen und n Spiegelungen.

$\text{Isom}(T)$

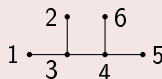


Abbildung: Baum T

Die Isometrien auf T sind $f_1 = id$, $f_2 = (12)$, $f_3 = (56)$, $f_4 = (12)(56)$, $f_5 = (15)(26)(34)$, $f_6 = (16)(25)(34)$, $f_7 = (1625)(34)$, $f_8 = (1526)(34)$ für $f_i \in \text{Sym}(6)$.

$\phi : D_4 \rightarrow \text{Isom}(T)$ mit $\phi(a) = f_5$, $\phi(b) = f_7$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Damit wirkt also die Diedergruppe D_4 auf den Baum T .

Eine Diedergruppe D_n für $n > 2$ ist die Isometriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks und besteht aus n Drehungen und n Spiegelungen. Untergruppen von D_4 sind $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_2$.