Mediane Algebra

Christoph Hilmes

1. Def a) Eine <u>mediane Algebra</u> (X, m) ist eine Menge X mit einer Operation $m: X^3 \to X$, $(a,b,c) \mapsto m(a,b,c)$ mit:

Med 1) $\forall a,b \in X: \ m(a,a,b) = a$

Med 2) $\forall a,b,c \in X: \ m(a,b,c) = m(b,a,c) = m(b,c,a)$

Med 3) $\forall a,b,c,d,e \in X: \ m(m(a,b,c),d,e) = m(a, m(b,d,e), m(c,d,e))$

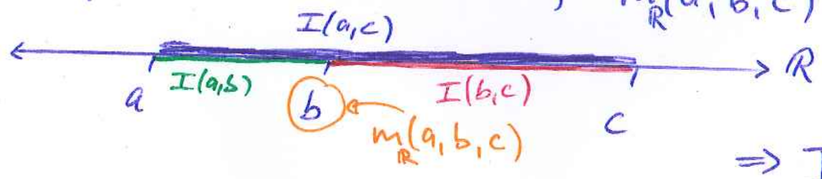
$m(a,b,c)$ heißt dann Median von a, b und c.

b) Sei (X, m) med. Alg. und $a, b \in X$. Die Menge $I(a,b) := \{x \in X \mid m(a,b,x) = x\}$ heißt <u>Intervall</u> der Endpunkte a und b.

c) Ein <u>medianer Homomorphismus</u> zwischen zwei med. Alg. ist eine Abbildung $f: (X, m_X) \longrightarrow (Y, m_Y)$ mit:

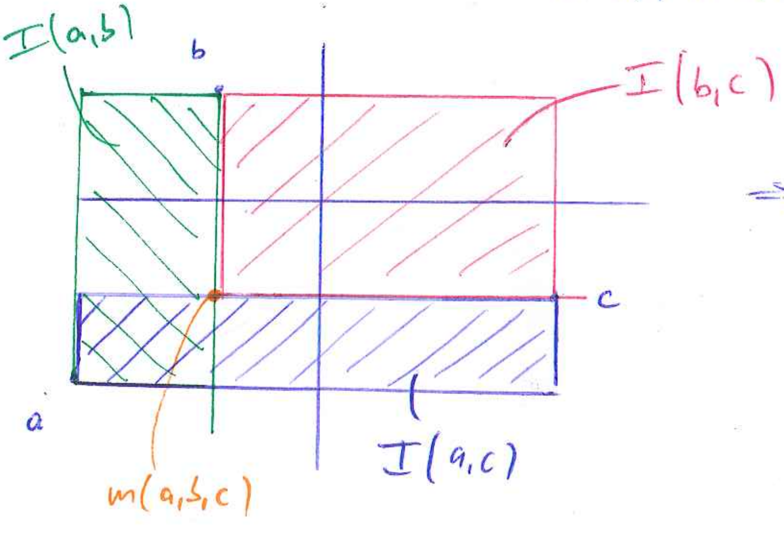
$$\forall a,b,c \in X: \ f(m_X(a,b,c)) = m_Y(f(a), f(b), f(c))$$

2. Beispiele a) $X = \mathbb{R}$, $m_{\mathbb{R}}(a,b,c) := a+b+c - \min(a,b,c) - \max(a,b,c)$



$$\Rightarrow I_{\mathbb{R}}(a,b) = [a,b]$$

b) $X = \mathbb{R}^2$, $m((a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)) := (m_{\mathbb{R}}(a_1,b_1,c_1), m_{\mathbb{R}}(a_2,b_2,c_2))$

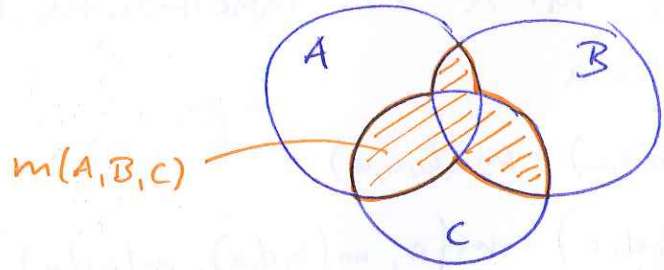


$$\Rightarrow I((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = I_{\mathbb{R}}(a_1,b_1) \times I(a_2,b_2)$$

c) Sei X eine bel. Menge. Definiere $m: \mathcal{P}(X)^3 \to \mathcal{P}(X)$

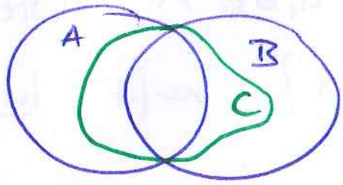
durch $m_B(A,B,C) := (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$= (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$



$(\mathcal{P}(X), m_B)$ heißt dann die boolsche mediane Algebra.

Es gilt $I(A,B) = \{C \in \mathcal{P}(X) \mid \overbrace{A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B}^{\Leftrightarrow C = m_B(A,B,C)}\}$



$C \in I(A,B)$

12:30

3. Eigenschaften von Intervallen (X,m) med. Alg. $a,b,c \in X$.

Int 1) $I(a,a) = \{a\}$, $\{a,b\} \subseteq I(a,b)$

Int 2) $I(a,b) = I(b,a)$

Int 3) $b \in I(a,c) \Rightarrow I(a,b) \subseteq I(a,c)$

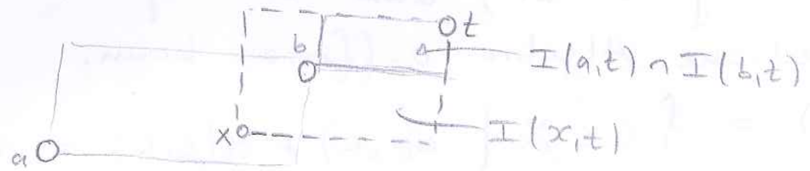
Int 4) $m(a,b,x) \in I(a,b)$

Int 5) $I(a,b) \cap I(a,c) = I(a, m(a,b,c))$

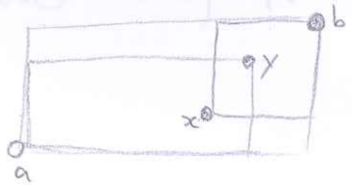
Int 6) $b \in I(a,c) \Leftrightarrow I(a,b) \cap I(b,c) = \{b\}$

Int 7) $I(a,b) \cap I(b,c) \cap I(a,c) = \{m(a,b,c)\}$

Int 8) $x \in I(a,b) \Rightarrow \forall t \in X: \; I(a,t) \cap I(b,t) \subseteq I(x,t)$



Int 9) $x \in I(a,b)$, $y \in I(x,b) \Rightarrow x \in I(a,y)$



Beweis: 1) – 6) „klar"

7) $I(a,b) \cap I(b,c) \cap I(a,c) \overset{5)}{=} I(b, m(a,b,c)) \cap I(c, m(a,b,c))$

$m(a,b,c) \in I(b,c) \overset{6)}{=} \{m(a,b,c)\}$

8) Sei $x \in I(a,b)$ und $t \in X$.

Sei nun $c \in I(a,t) \cap I(b,t)$. zZ $c \in I(x,t)$

$$m(x,c,t) = m(m(a,x,b), c, t)$$
$$\overset{\text{(Med 3)}}{=} m(x, m(a,c,t), m(b,c,t))$$
$$= m(x, c, c) \overset{\text{(Med 1)}}{=} c$$

9) Sei $x \in I(a,b)$, $y \in I(x,b)$. zZ: $x \in I(a,y)$

$$m(x,a,y) = m(m(a,x,b), a, m(x,y,b))$$
$$\overset{\text{(Med3)}}{=} m(m(a,a,y), x, b)$$
$$\overset{\text{(Med1)}}{=} m(a,x,b) = x .$$

4. Def. (Variante von Def 1)

Eine mediane Algebra ist eine Menge X mit einer Abb. $I: X \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ mit

i) $I(x,x) = \{x\}$

ii) $y \in I(x,z) \Rightarrow I(x,y) \subseteq I(x,z)$

iii) $x,y,z \in X \Rightarrow I(x,y) \cap I(x,z) \cap I(y,z) = \{m\}$ für ein $m \in X$

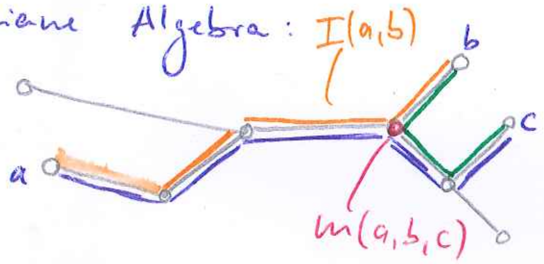
(Dies ist dann gerade der Median von x, y und z.)

5. Weitere Beispiele

a) Aus 6. folgt direkt, dass man jeden metr. med. Raum als mediane Algebra auffassen kann.

$$I(a,b) = \{c \in X \mid d(a,c) + d(c,b) = d(a,b)\}$$

b) Insbesondere beschreibt nach a) jeder Baum eine mediane Algebra:



~~8~~6. Def. Sei (X, m) eine med. Algebra

a) $A \subseteq X$ heißt <u>konvex</u> wenn $\forall a, b \in A: I(a,b) \subseteq A$
(oder äq. $\forall a, b \in A$, $x \in X$: $m(a,b,x) \in A$)

b) $H \subseteq X$ heißt <u>konvexer Halbraum</u> wenn sowohl H als auch $H^c = X \setminus H$ konvex sind.
Das Paar $\{H, H^c\}$ heißt dann <u>konvexe Wand</u>.

c) $\mathcal{H}_c := \{ H \subseteq X \mid H$ ~~Ha~~ konvexer Halbraum$\}$
$\mathcal{W}_c := \{ \{H, H^c\} \mid H \in \mathcal{H}_c \}$

13.~~10~~.05

7~~9~~. <u>Beispiele</u> (X, m) bel. med. Algebra

a) $\forall a, b \in X$ sind $\emptyset$, X, $\{a\}$, $I(a,b)$ konvex

b) Beliebige Schnitte von konvexen Teilmengen sind konvex.

c) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine bzgl. „$\subseteq$" total geordnete Menge (Kette) und jedes $A \in \mathcal{C}$ konvex $\Rightarrow$ $\bigcup \mathcal{C}$ konvex.

d) $N, M \subseteq X$ konvex $\Rightarrow$ $\underbrace{\bigcup \{ I(n,m) \mid n \in N, m \in M \}}_{=: I(N,M)}$ konvex.

13.~~10~~ 15

~~10~~8. <u>Theorem</u> Sei (X, m) eine mediane Algebra.
Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt, nichtleer und konvex.
Dann ex eine konvexe Wand $W = \{H, H^c\} \in \mathcal{W}_c$, die A und B trennt, also $A \subseteq H$ und $B \subseteq H^c$.

Beweis: Schritt 1: Beh: Aussage gilt falls $B = \{b\}$

Bew: Betrachte $\mathcal{H} := \{ C \subseteq X \mid C$ konvex, $A \subseteq C$, $b \notin C\}$.
$\mathcal{H} \neq \emptyset$ da $A \in \mathcal{H}$. Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{H}$ eine total geord. Menge bzgl. „$\subseteq$". $\forall C \in \mathcal{C}$: C konvex, $A \subseteq C$ und $b \notin C$
$\Rightarrow A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ und $b \notin \mathcal{C}$ und wegen 9(c) folgt auch dass $\bigcup \mathcal{C}$ konvex ist.

$\Rightarrow \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{H}$ und damit obere Schranke für $\mathcal{C}$.

(Lemma von Zorn) $\Rightarrow$ Es ex ein bzgl „$\subseteq$" max Element

$H \in \mathcal{H}$. zz: H ist ein ko. Halbraum.

Da $H \in \mathcal{H}$ bleibt zu zeigen: H^c ist konvex.

A: H^c ist nicht konvex. Dann ex $x_1, x_2 \in H^c$ und $x_3 \in I(x_1, x_2)$ mit $x_3 \notin H^c$ also $x_3 \in H$.

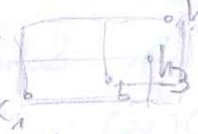
9(d) $\Rightarrow$ $I(H, \{x_1\})$ und $I(H, \{x_2\})$ sind konvex.

Da $x_1 \notin H \subseteq I(H, \{x_1\})$ folgt wegen der Maximalität von H $b \in I(H, \{x_1\})$ und analog $b \in I(H, \{x_2\})$

$\Rightarrow \exists h_1, h_2 \in H$: $b \in I(h_1, x_1)$ und $b \in I(h_2, x_2)$

Setze $h_3 := m(h_1, h_2, b) \Rightarrow h_3 \in I(h_1, b) \cap I(h_2, b) \cap \underbrace{I(h_1, h_2)}_{\subseteq H \text{ (konv)}}$

$\overset{\text{(Int 9)}}{\Rightarrow}$ $b \in I(h_3, x_1) \cap I(h_3, x_2)$ ⊙ denn



$\overset{\text{(Int 8)}}{\longrightarrow} \subseteq I(h_3, x_3) \underset{\substack{h_3, x_3 \in H \\ H \text{ konv.}}}{\subseteq} H$ ↯ $b \notin H$ $(H \in \mathcal{H})$

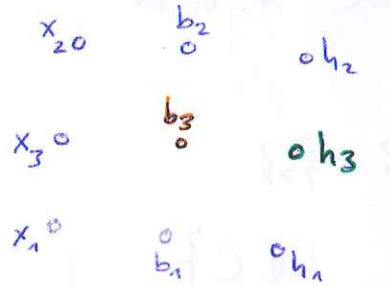
$x_3 \in I(x_1, x_2)$

$\Rightarrow \{H, H^c\}$ ist konvexe Wand die A und B trennt. ✓

Schritt 2: Es seien $x_i, b_i, h_i \in X$ und es gelte

i) $x_3 \in I(x_1, x_2)$ ii) $b_1 \in I(x_1, h_1)$, $b_2 \in I(x_2, h_2)$

Beh: Für $b_3 := m(b_1, b_2, x_3)$, $h_3 := m(h_1, h_2, b_3)$ gilt $b_3 \in I(x_3, h_3)$



Bew: A: $b_3 \notin I(x_3, h_3)$

(Schritt 1) $\Rightarrow \exists H \in \mathcal{H}_c$ mit $b_3 \in H$ und $I(x_3, h_3) \subseteq H^c$ also insb. $x_3, h_3 \in H^c$.

$(h_3 \in H^c, b_3 \in H) \Rightarrow h_1, h_2 \in H^c$ (sonst: $h_3 = m(h_1, h_2, b_3) \in I(h_i, b_3) \subseteq H$ ↯)

$(b_3 \in H, x_3 \in H^c) \Rightarrow b_1, b_2 \in H$ ($b_3 = m(b_1, b_2, x_3) \in I(b_i, x_3) \underset{x_3 \in H^c}{\subseteq} H^c$ ↯.)

ii) $\Rightarrow x_1, x_2 \in H \Rightarrow x_3 \in I(x_1, x_2) \subseteq H$ ↯ $(x_3 \in H^c)$ ✓

Schritt 3: Beh: Aussage gilt allgemein

Bew: Betrachte $\tilde{\mathcal{H}} = \{C \subseteq X \mid A \subseteq C,\ B \cap C = \emptyset,\ C \text{ konvex}\}$

Analog zu Schritt ex ein max Element $H \in \tilde{\mathcal{H}}$.

zZ: H ist Halbraum. H ist konvex, da $H \in \tilde{\mathcal{H}}$.

A: H^c ist nicht konvex.

Dann ex $x_1, x_2 \in H^c$ und $x_3 \in I(x_1, x_2)$ mit $x_3 \in H$.

Da H max in $\tilde{\mathcal{H}}$ ist folgt $I(H, \{x_1\}) \cap B \neq \emptyset$

und $I(H, \{x_2\}) \cap B \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \exists b_1, b_2 \in B,\ h_1, h_2 \in H:\ b_1 \in I(h_1, x_1),\ b_2 \in I(h_2, x_2)$

Für $b_3 := m(b_1, b_2, x_3) \in B$ und $h_3 := m(h_1, h_2, b_3) \in H$

folgt nach Schritt 2: $b_3 \in I(x_3, h_3) \underset{H \text{ konvex}}{\subseteq} H$ $\lightning$ $(H \cap B = \emptyset)$

$\Rightarrow \{H, H^c\}$ trennt A und B. $\square$

9. Korollar Sei (X, m) eine mediane Algebra und definiere $\sigma: X \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_c),\ x \mapsto \{H \in \mathcal{H}_c \mid x \in H\}$.

Dann gilt $(X, m) \cong (\sigma(X), m_B)$

Beweis: σ ist ein med. Homomorphismus:

$$\forall x, y, z \in X:\ \sigma(m(x,y,z)) = \{H \in \mathcal{H}_c \mid m(x,y,z) \in H\}$$

$I(x,y) \cap I(y,z) \cap I(x,z)$ =

$$\overset{*}{=} \{H \in \mathcal{H}_c \mid I(x,y) \subseteq H\} \cup \{H \in \mathcal{H}_c \mid I(y,z) \subseteq H\} \cup \{H \in \mathcal{H}_c \mid I(x,z) \subseteq H\}$$

Konvexität

$$= \{H \in \mathcal{H}_c \mid x, y \in H\} \cup \{H \in \mathcal{H}_c \mid y, z \in H\} \cup \{H \in \mathcal{H}_c \mid x, z \in H\}$$

$$= (\{H \in \mathcal{H}_c \mid x \in H\} \cap \{H \in \mathcal{H}_c \mid y \in H\}) \cup \ldots \cup \ldots$$

$$= (\sigma(x) \cap \sigma(y)) \cup \ldots \cup (\sigma(x) \cap \sigma(z))$$

$$= m_B(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$$