

Seminarvortrag Andreas Goß

§1 Vervollständigung von medianen Räumen

Definition 1.1: Sei (X, d) ein metr. Raum, $\delta > 0$
 $z, y, x \in X$, dann ist z zwischen x und y bis auf δ genau dann, wenn gilt:

$$d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, y) + \delta$$

Analog ist $(a_1, \dots, a_n)$ eine δ -geodätische Sequenz, wenn gilt:

$$d(a_1, a_2) + \dots + d(a_{n-1}, a_n) \leq d(a_1, a_n) + \delta$$

Weiter wird mit $I_\delta(a, b)$ die Menge aller Punkte bezeichnet, die zwischen a und b bis auf δ liegt

und mit $M_\delta(a, b, c)$ der Schnitt $I_{2\delta}(a, b) \cap I_{2\delta}(b, c) \cap I_{2\delta}(a, c)$.

Lemma 1.2: Für $\delta, \delta' > 0$ und für alle $c \in I_\delta(a, b)$ gilt, dass $I_{\delta'}(a, c) \subseteq I_{\delta'+\delta}(a, b)$.

Beweis: Sei $x \in I_{\delta'}(a, c)$ bel. $z: x \in I_{\delta'}(a, c)$

$$\begin{aligned} d(a, x) + d(x, b) &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(a, x) + d(x, c) + d(c, b) \\ &\stackrel{x \in I_{\delta'}(a, c)}{\leq} d(a, c) + d(c, b) + \delta' \\ &\stackrel{c \in I_\delta(a, b)}{\leq} d(a, b) + \delta' + \delta \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 1.3: Sei (X, d) ein medianer Raum und $a, b, c \in X$ bel., dann gilt:

i) $I_{2\delta}(a, b) = \mathcal{N}_\delta(a, b)$

ii) $B_\delta(m(a, b, c)) \subseteq M_\delta(a, b, c) \subseteq B_{3\delta}(m(a, b, c))$

Beweis: i) Wir wissen bereits $I(a, b)$ ist Tor-konvex und für $x \in X$ ist das Tor zwischen $I(a, b)$ und x gegeben durch $m(x, a, b)$:

Sei also $x \in I_{2\delta}(a, b)$ bel. $z: d(x, I(a, b)) \leq \delta$

Es gilt:

mit Einträgen von $m(a, b, x)$

$$\begin{aligned} d(a, x) + d(x, b) &\stackrel{\downarrow}{=} d(a, m(a, b, x)) + 2d(m(a, b, x), x) + d(b, m(a, b, x)) \\ &= d(a, b) + 2 \cdot d(m(a, b, x), x) \end{aligned}$$

$$\leadsto d(a,b) + 2d(x, m(a,b,x)) \leq d(a,b) + 2\delta$$

$$\leadsto d(x, m(a,b,x)) = d(x, I(a,b)) \leq \delta$$

Rückrichtung ähnlich.

Zu ii):

Sei $x \in B_\delta(m(a,b,c))$ bel.

Dann ist:

$$d(a,x) + d(x,b) \leq d(a,b) + \underbrace{2d(x, m(a,b,c))}_{\leq \delta} \leq d(a,b) + 2\delta$$

Für die anderen analog.

$$\Rightarrow x \in I_{2\delta}(a,b) \cap I_{2\delta}(b,c) \cap I_{2\delta}(a,c) = M_\delta(a,b,c)$$

$$\text{also } B_\delta(m(a,b,c)) \subseteq M_\delta(a,b,c)$$

$$M_\delta(a,b,c) \subseteq B_{3\delta}(m(a,b,c))$$

Sei $p \in M_\delta(a,b,c)$ bel. Wir betrachten folgende 5 mediane Punkte:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= m(p, a, b) \\ p_2 &= m(p, b, c) \\ p_3 &= m(p, a, c) \end{aligned} \right\} \text{ das jeweilige Tor von } p \text{ zu } I(\cdot, \cdot)$$

$$q = m(p_1, b, c)$$

$$r = m(q, a, c)$$

Beh: $r = m(a,b,c)$

Es gilt $r \in I(a,c)$ nach Definition.

Weiter gilt $r \in I(q,c)$ und da $q \in I(b,c)$ ist auch $r \in I(b,c)$



Schließlich ist $r \in I(a,q)$ und $q \in I(p_1, b)$ sowie $p_1 \in I(a,b)$, so folgt $r \in I(a,b)$

und somit aufgrund der Eindeutigkeit in medianen (metr.)

Räumen $r = m(a,b,c)$

Da die Abb. $x \mapsto m(x, a, b)$ 1-Lipschitz ist
 folgt nun: $d(\underbrace{m(p, b, c)}_{=p_2}, \underbrace{m(p_1, b, c)}_{=q}) \leq d(p, p_1) \leq \delta$

Da p jeweils Abstand δ zu p_1, p_2, p_3 hat, wegen
 i). (Da p_1, p_2, p_3 die jeweiligen Töve für p sind).

$$\leadsto d(\underbrace{p, m(p_1, b, c)}_{=q}) \leq d(p, p_1) + d(p_1, \underbrace{m(p_1, b, c)}_{=q}) \leq 2\delta \quad (*)$$

Weiter gilt nun:

$$d(\underbrace{m(p, a, c)}_{p_3}, \underbrace{m(q, a, c)}_{r}) \leq d(p, q) \stackrel{(*)}{\leq} 2\delta$$

Somit gilt abschließend:

$$d(p, r) \leq d(p, p_3) + d(p_3, r) \leq \delta + 2\delta = 3\delta.$$

Insgesamt also $d(p, m(a, b, c)) \leq 3\delta \quad \square$

Theorem 1.4: Sei (X, d) ein metrischer medianer Raum, dann ist die metrische Vervollständigung $(\tilde{X}, d)$ wieder median, also $(\tilde{X}, d)$ ein medianer Raum.

Beweis: Wir müssen Existenz und Eindeutigkeit von medianen Punkten zeigen.

Zur Existenz: Da die mediane Abb.

$m: X \times X \times X \rightarrow X$ 1-Lipschitz ist können wir m stetig fortsetzen auf $\tilde{X} \times \tilde{X} \times \tilde{X}$, somit erhalten wir für $a, b, c \in \tilde{X}$ bel. so einen medianen Punkt.

Eindeutigkeit: Angenommen $p \in \tilde{X}$, $p \neq m(a, b, c)$ ist weiterer medianer Punkt zu $a, b, c \in \tilde{X}$.
 Zu $a, b, c \in \tilde{X}$ gibt es nun Folgen $(a_n), (b_n), (c_n)$ von Punkten in X , welche gegen a, b, c konvergieren.

Sei $m_n = m(a_n, b_n, c_n)$, sowie $\delta_n = d(a, a_n) + d(b, b_n) + d(c, c_n)$

Wir wollen zeigen:

$$p \in M_{\delta_n}(a_n, b_n, c_n)$$

$$d(p, a_n) + d(p, b_n) \leq d(a, a_n) + d(p, a) + d(p, b) + d(b, b_n)$$

$$= d(a, a_n) + d(a, b) + d(b, b_n)$$

$$\leq d(a, a_n) + d(a_n, b_n) + 2d(b, b_n)$$

$$\leq d(a_n, b_n) + 2\delta_n$$

Analog für die anderen Möglichkeiten.

Weiter gibt es eine Folge (p_n) in X mit

$$d(p, p_n) \leq \delta_n$$

Analog wie oben gilt, dass p_n ein $2\delta_n$ -medianer Punkt zu a_n, b_n, c_n ist.

Mit Lemma 1.3 ii) folgt nun

$$d(p_n, m_n) \leq 6\delta_n \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ gilt } \delta \rightarrow 0$$

also $p = m(a, b, c)$.

□

§2 Rechtecke in medianen Räumen und parallele Paare von Punkten

Definition 2.1: i) Sei (X, d) ein metr. Raum, dann bezeichnen wir einen geschlossenen Weg von 4 Punkten (a, b, c, d, a) als ein Viereck, welches wir mit $[a, b, c, d]$ abkürzen.

ii) Wir bezeichnen ein Viereck $[a, b, c, d]$ als Rechteck, wenn die vier Sequenzen:

$(a, b, c), (b, c, d), (c, d, a), (d, a, b)$ geodätisch sind.

Definition 2.2: Zwei Geraden (a, b) und (c, d) sind parallel, wenn $[a, b, c, d]$ ein Rechteck ist.

Satz 2.3 (Ohne Beweis):

In medianen ist die Paarweise Parallelität von Geraden eine Äquivalenzrelation.

Lemma 2.4: Sei $[x, a, y, b]$ ein bel. Viereck in einem medianen Raum. Dann existiert genau ein Rechteck mit $[x', a', y', b']$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $(x, x', a', a), (a, a', y', y), (y, y', b', b), (b, b', x', x)$ ^{sind.} ~~ist~~ geodätisch
- (ii) (a, a', b', b) ist geodätisch
- (iii) $(x, x', y', y), (y, y', x', x)$ ist geodätisch.

Beweis: (Nur Konstruktion) für den vollständigen Beweis s. Chatterji S. 896

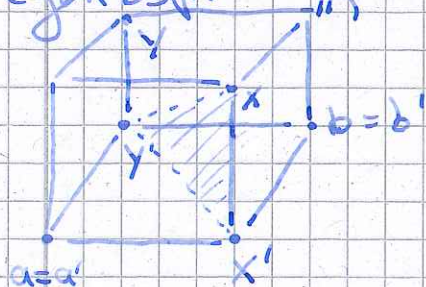
Man setzt:

$$x' = m(x, a, b), y' = m(y, a, b), a' = m(a, x', y'), b' = m(b, x', y')$$

Definition 2.5: Das ~~Beispiel~~ Dreieck $[x', a', y', b']$ wie in 2.4. nennen wir zentrales Rechteck von $[x, a, y, b]$

Bemerkung 2.6: Die 3. Eigenschaft lässt sich nicht zu (x, x', y', y) verbessern.

Gegenbsp. $\mathbb{R}^3$ mit:



bzgl. der ℓ_1 -Norm

Lemma 2.7: Seien x, y, p, q vier Punkte mit (x, p, q) und (p, q, y) sind geodätisch, dann ex. eine geodätische Sequenz (x, x', p', y) mit (x', y') und (p, q) sind parallel.

Beweis: Wir betrachten das zentrale Rechteck von $[p, q, y, x]$ ($[p, q', y', x']$)

Dann gilt:

$$(b, b', y, y')$$

$$p' = m(p, q, x) = p$$

$$q' = m(q, p, y')$$

$$y' = m(y, q, x)$$

$$\Rightarrow q \in I(p, y)$$

$$\begin{array}{cccc} & p & q' & y' & y \\ \hline & & & & \end{array}$$

$$q' \in I(p, y') \text{ da } y' \in I(y, p)$$

$$\text{also } q' \in I(p, y) \Rightarrow q' = q$$

Damit ist nach Def.

$[p, q', y', x']$ ein Rechteck und somit

$(p, q), (x, x')$ parallel.

Bleibt noch zz. (x, x', y', y) geodätisch

Mit 1) folgt:

$$\cancel{(x, x', p)} \text{ und } (y, y', x', x)$$