

## 9. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18  
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer  
Nils Leder  
Antoine Beljean

---

*Definition:* Sei  $G$  eine Gruppe und  $\pi_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1), \pi_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$  lineare Darstellungen von  $G$  auf komplexen Vektorräumen  $V_1, V_2$ . Wir sagen, die Darstellungen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  sind *isomorph* zueinander, wenn es einen  $G$ -äquivalenten  $\mathbb{C}$ -linearen Isomorphismus  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  gibt, d.h. es gilt  $\varphi(gu) = g\varphi(u)$  für alle  $g \in G, u \in V_1$ .

### Aufgabe 9.1

Seien  $V_1, V_2$  komplexe Vektorräume,  $\pi_1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1), \pi_2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$  irreduzible, lineare Darstellungen einer Gruppe  $G$  und  $\pi_1 \times \pi_2$  die induzierte lineare Darstellung auf  $V_1 \times V_2$ . Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

- i) Die Darstellungen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  sind isomorph zueinander.
- ii)  $V_1 \times V_2$  besitzt einen  $G$ -invarianten Unterraum  $V$  mit

$$V \notin \{\{0\}, V_1 \times \{0\}, \{0\} \times V_2, V_1 \times V_2\}.$$

### Aufgabe 9.2

Bewerte den folgenden „Beweis“, der zeigen soll, dass jede kompakte Gruppe sich injektiv und stetig in ein endliches Produkt  $U(m_1) \times \dots \times U(m_r)$  von unitären Matrizen Gruppen einbetten lässt.

Beweis: Zu jedem  $g \in G - \{1\}$  gibt es einen Morphismus  $\rho_g : G \rightarrow U(m_g)$  mit  $\rho_g(g) \neq 1$ . Da  $\rho_g$  stetig ist, gibt es also eine offene Umgebung  $W_g$  von  $g$  mit  $\rho_g(h) \neq 1$  für alle  $h \in W_g$ . Da  $G$  kompakt ist, wird  $G$  von endlich vielen solchen  $W_g$  überdeckt, also  $G \subseteq W_{g_1} \cup \dots \cup W_{g_r}$ . Damit ist

$$\rho_{g_1} \times \dots \times \rho_{g_r} : G \rightarrow U(m_{g_1}) \times \dots \times U(m_{g_r})$$

die gesuchte Einbettung.

*Bitte wenden.*

### Aufgabe 9.3

Sei  $G$  eine kompakte Gruppe,  $E$  ein normierter Vektorraum und  $G \times E \rightarrow E$  eine stetige lineare Wirkung von  $G$  auf  $E$ .

Zeige, dass das Supremum  $\sup\{\|gu\| \mid g \in G, u \in B_1^E(0)\}$  existiert.

*Hinweis:* Verwende Wallace' Lemma.

### Aufgabe 9.4

In dieser Aufgabe zeigen wir, dass man aus einer linearen, stetigen Wirkung einer kompakten Gruppe auf einem Hilbertraum eine unitäre Wirkung (also einen Hilbert- $G$ -Modul) konstruieren kann.

Sei  $(E, \langle | \rangle)$  ein Hilbertraum,  $G$  eine kompakte Gruppe und  $G \times E \rightarrow E$  eine lineare, stetige Wirkung von  $G$  auf  $E$ . Zeige:

- a) Die Abbildung  $b(u, v) = \int_G \langle g^{-1}u \mid g^{-1}v \rangle dg$  definiert eine stetige positiv definite hermitesche Form auf  $E$  und  $b$  ist  $G$ -invariant, d.h. es gilt  $b(hu, hv) = b(u, v)$  für alle  $h \in G, u, v \in E$ .
- b) Die von  $b$  induzierte Norm ist äquivalent zu der ursprünglichen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $E$ , d.h. es gibt Konstanten  $\alpha, \beta > 0$  so, dass

$$\alpha b(u, u) \leq \|u\|^2 \leq \beta b(u, u)$$

für alle  $u \in E$  gilt.

*Hinweis:* Verwende Aufgabe 9.3.

Abgabe bis: Donnerstag, den 14.12.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29