8. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 8.1
Seien $(E, \|.\|_E)$ und $(F, \|.\|_F)$ normierte Vektorräume. Sei $B(E, F)$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren von E nach F versehen mit der Operatornorm $\|.\|$. Seien $S, T \in B(E, F), u \in E$ und $z \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeige:

a) $\|zT\| = |z| \cdot \|T\|$

b) $\|T(u)\|_F \leq \|T\| \cdot \|u\|_E$

c) $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$

d) Ist $E = F$, so gilt $\|T \circ S\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$.

Aufgabe 8.2
Sei $(E, \|.\|)$ ein Banachraum (also ein vollständiger, normierter Vektorraum) und $B(E)$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf E.
Zeige: Die Einheitengruppe U von $B(E)$ ist offen in $B(E)$ und $(U, \circ)$ bildet eine topologische Gruppe.
Hinweis: Zeige für alle $T \in B(E)$ mit $\|T\| < 1$, dass $\mathbb{1} + T \in U$ gilt. Verwende hierfür die geometrische Reihe. Um die Stetigkeit der Inversenbildung $i : U \to U, g \mapsto g^{-1}$ zu zeigen, beweise zunächst, dass i stetig auf einer Einsumgebung ist.

Aufgabe 8.3
Seien E und F normierte Vektorräume und $T : E \to F$ ein linearer Operator. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) T ist ein kompakter Operator.

ii) Die Menge $T(B_1^E(0))$ ist relativ kompakt in F, d.h. $\overline{T(B_1^E(0))}$ ist kompakt.

iii) Für jede beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E besitzt $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Bitte wenden.

Aufgabe 8.4
Sei $(E, \langle \, | \, \rangle)$ ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und $C(E) \subseteq B(E)$ die Teilmenge aller kompakten linearen Operatoren auf E.
Zeige: Die Menge $C(E)$ ist ein echtes beidseitiges Ideal im Ring $B(E)$.

***-Aufgabe**
Sei $K = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ mit der diskreten Topologie und $L = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ mit der Produkttopologie. Sei $G = K \times L$.
Zeige: Es gibt einen stetigen Gruppenautomorphismus $\varphi : G \to G$, dessen Umkehrabbildung φ^{-1} aber nicht stetig ist. (Dies bedeutet, φ ist kein Automorphismus in der Kategorie der topologischen Gruppen.)

Abgabe bis: Donnerstag, den 7.12.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29