7. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 7.1
Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Zeige: Ist G unendlich, so ist $C_c(G)$ ein unendlich-dimensionaler reeller Vektorraum.
Hinweis: Benutze die Tychonoff-Eigenschaft, um eine unendliche linear unabhängige Familie $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf G zu konstruieren.

Aufgabe 7.2
Sei E ein Hilbertraum und $F \subseteq E$ ein Untervektorraum. Zeige:

a) $F^\perp = \overline{F}^\perp$

b) $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$

Definition: Sei E ein Hilbertraum und $T : E \to E$ ein linearer Operator. Dann heißt T *idempotent*, wenn $T^2 = T$ gilt. Wir nennen T *selbstadjungiert*, wenn $\langle T(x) \mid y\rangle = \langle x \mid T(y)\rangle$ für alle $x, y \in E$ gilt.

Aufgabe 7.3
Sei E ein Hilbertraum und P ein stetiger, linearer Operator. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) P ist die orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum F von E, d.h. es gibt einen abgeschlossenen Unterraum $F \subseteq E$ mit $P(x) = x$ für alle $x \in F$ und $P(y) = 0$ für alle $y \in F^\perp$.

ii) P ist idempotent und selbstadjungiert.

Bitte wenden.

Aufgabe 7.4
Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen Polynome $\mathbb{C}[T]$ mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}.$$

Sei weiter $\frac{d}{dT} : \mathbb{C}[T] \to \mathbb{C}[T]$ der Ableitungsoperator, d.h. ein Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ wird auf seine Ableitung $f' = \frac{df}{dT}$ abgebildet. Zeige:

a) $\|.\|_\infty$ definiert eine Norm auf $\mathbb{C}[T]$.

b) Die Abbildung $\frac{d}{dT}$ ist ein linearer, unbeschränkter Operator auf $\mathbb{C}[T]$.

***-Aufgabe**
Sei V ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeige: V ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, wenn für alle $x, y \in V$ die Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

gilt.

Abgabe bis: Donnerstag, den 30.11.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29