6. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 6.1
Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Zeige: Ist jedes Element $g \in G$ in einer kompakten Untergruppe von G enthalten, so ist G unimodular.

Aufgabe 6.2
Sei G eine lokalkompakte Gruppe und $\int_G$ ein linksinvariantes Integral auf G. Für $g \in G$ und $\varphi \in C_c(G)$ sei $K_g(\varphi) = \int_G \varphi \circ \gamma_{g^{-1}}$. Zeige: K_g ist ein links-invariantes Integral und es gilt $K_g(\varphi) = \int_G \varphi \cdot \operatorname{mod}(g)$.

Aufgabe 6.3
Sei $G = U(1)$ die Kreisgruppe und $\pi : \mathbb{R} \to G$ der Morphismus $t \mapsto e^{2\pi i t}$. Definiere $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$ durch

$$I(\varphi) = \int_0^1 \varphi(\pi(x))dx.$$

Zeige: I ist ein Haar-Integral auf G.

Aufgabe 6.4
Sei $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Sei $I : C_c(G) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$I(\varphi) = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\mathbb{R}} \varphi \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{a^2} db\, da.$$

a) Zeige: I definiert ein Haar-Integral auf G.

b) Bestimme die Funktion $\operatorname{mod} : G \to \mathbb{R}_{>0}$ und folgere, dass G nicht unimodular ist.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**

Zeige: Die lineare Gruppe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist unimodular.

Hinweis: Setze $D = \{\begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*\}$ und benutze die Zerlegung $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})D$. Betrachte weiter für $a \in \mathbb{R}^*$ die Abbildung

$$d_a : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, X \mapsto \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} a^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

und zeige, dass $\det(d_a) = 1$ gilt.

Abgabe bis: Donnerstag, den 23.11.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29