5. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 5.1
Sei R ein kommutativer Ring und G eine Gruppe. Sei $R[G]$ der zugehörige Gruppenring.

a) Zeige, dass $R[G]$ folgende universelle Eigenschaft besitzt: Ist $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\varphi : G \to S^{\times}$ ein Gruppenhomomorphismus, so existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $F : R[G] \to S$, der f und φ fortsetzt. Folgere hieraus, dass es eine Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}_{Grp}(G, S^{\times})$ und $\mathrm{Hom}_{Rng}(\mathbb{Z}[G], S)$ gibt.

b) Sei G eine nicht-triviale endliche Gruppe. Zeige: $R[G]$ enthält nicht-triviale Nullteiler.

Aufgabe 5.2
Sei R ein kommutativer Ring und $G = \mathbb{Z}$. Zeige: Der Gruppenring $R[G]$ ist isomorph zum Ring der Laurent-Polynome $R[X, X^{-1}]$.

Aufgabe 5.3
Seien G und H profinite Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein (nicht notwendig stetiger) Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ genau dann stetig ist, wenn für jeden offenen Normalteiler $N \trianglelefteq H$ das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ offen in G ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 5.4
Sei G eine Gruppe. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller Linksnebenklassen von Untergruppen $H \subseteq G$ mit $[G : H] < \infty$.

a) Zeige: Die Menge $\mathcal{B}$ bildet die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf G.

b) Sei I die Menge aller Normalteiler von endlichem Index in G. Definiere

$$\hat{G} := \{(g_N N)_{N \in I} \in \prod_{N \in I} G/N \mid g_N N' = g_{N'} N' \text{ für alle } N, N' \in I \text{ mit } N \subseteq N'\}$$

versehen mit der von der Produkttopologie (bzgl. den diskreten Topologien auf den endlichen Gruppen $G/N, N \in I$) induzierten Teilraumtopologie. Zeige: $\hat{G}$ ist eine profinite Gruppe.

c) Zeige: Die Abbildung $i : G \to \hat{G}, g \mapsto (gN)_{N \in I}$ ist bzgl. $\mathcal{T}$ stetig und das Bild $i(G)$ ist dicht in $\hat{G}$.

Man nennt $\hat{G}$ den *profiniten Abschluss* von G.

Abgabe bis: Donnerstag, den 16.11.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29