2. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18 Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 2.1

a) Zeige, dass die topologische Gruppe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (versehen mit der Standardtopologie) zusammenhängend ist.

b) Sei $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Bestimme die Einskomponente G° und den Quotienten G/G°.

Hinweis: Verwende für a), dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ von den Elementarmatrizen $E_{ij}(r), r \in \mathbb{R}$ erzeugt wird (wobei die Elementarmatrix $E_{ij}(r)$ die Matrix sei, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle 1 sind, und deren einziger weitere von 0 verschiedene Eintrag sich an der Stelle (i, j) befindet und den Wert r annimmt) und zeige, dass diese in der Einskomponente liegen.

Aufgabe 2.2
Zeige: Jede abzählbare Hausdorff'sche topologische Gruppe G ist total unzusammenhängend.

Definition: Ein topologischer Raum X heißt *Baire'sch*, wenn für jede abzählbare Familie offener, dichter Teilmengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch ihr Durchschnitt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X ist.

Aufgabe 2.3 (6 Punkte)
Zeige:

a) Jeder Baire'sche Raum ist nicht mager.

b) Es gibt einen nicht-mageren Raum, der nicht Baire'sch ist.

c) Jeder lokalkompakte Raum und jeder vollständige metrische Raum ist Baire'sch.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**
In dieser Aufgabe beweisen wir eine allgemeinere Version von Wallace' Lemma. Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von Hausdorff'schen topologischen Räumen, für jedes $j \in J$ sei $A_j \subseteq X_j$ eine kompakte Teilmenge und sei $W \subseteq \prod_{j\in J} X_j$ eine offene Teilmenge mit $\prod_{j\in J} A_j \subseteq W$.
Zeige: Es existieren offene Teilmengen $U_j \subseteq X_j$ mit $\prod_{j\in J} A_j \subseteq \prod_{j\in J} U_j \subseteq W$ und $U_j = X_j$ für fast alle $j \in J$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 26.10.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29