12. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 12.1
Sei X ein Hausdorff-Raum, $\beta\mathbb{N}$ die Čech-Stone-Kompaktifizierung von $\mathbb{N}$ und $\omega \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Zeige:

a) $\mathbb{N}$ ist dicht in $\beta\mathbb{N}$.

b) Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X, so gilt $\omega\text{-}\lim_k a_k = \lim_k a_k$.

Aufgabe 12.2
Sei (X_n, d_n) eine Folge von metrischen Räumen und $\omega \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Wir wählen einen Basispunkt $o_n \in X_n$ für jedes $n \geq 0$ und setzen

$$E = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \mid (d_n(x_n, o_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}.$$

Für $\underline{x}, \underline{y} \in E$ setze $d(\underline{x}, \underline{y}) = \omega\text{-}\lim_k d_k(x_k, y_k)$.

a) Zeige: d ist eine Pseudometrik auf E.

b) Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf E durch

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Leftrightarrow d(\underline{x}, \underline{y}) = 0$$

und setze $X = \omega\text{-}\lim_n (X_n, o_n) = E/\sim$ sowie $d([\underline{x}], [\underline{y}]) = d(\underline{x}, \underline{y})$.
Zeige: d ist wohldefiniert und (X, d) ein metrischer Raum.

Man nennt (X, d) den *Ultralimes* oder *asymptotischen Kegel* der X_n (bzgl. ω).

Bitte wenden.

Aufgabe 12.3
Seien G_n für $n \in \mathbb{N}$ Gruppen, l_n eine Längenfunktion auf G_n und $\omega \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Sei $o_n = e_n$ das Neutralelement in G_n. Setze $d_n(g,h) = l_n(g^{-1}h)$ für $g,h \in G_n$. Zeige: Falls $l_n(aga^{-1}) = l_n(g)$ für alle $g,a \in G_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $G = \omega\text{-}\lim_n G_n$ eine Gruppe und $l(g) = d(e,g)$ eine Längenfunktion auf G.

Aufgabe 12.4
Bestimme (G,d) in folgenden Beispielen:

a) $G_n = \mathbb{Z}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $l_n(x_1,\ldots,x_m) = \frac{1}{n}(|x_1| + \ldots + |x_m|)$

b) $G_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $l_n(x) \in [0,\pi]$ mit $\cos(l_n(x)) = \cos(\frac{2\pi}{n}x)$

***-Aufgabe**
Zeige: ω-Limiten sind immer vollständig.

Abgabe bis: Donnerstag, den 18.1.2018, 8 Uhr im Briefkasten 29