11. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 11.1
Sei $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Exponentialfunktion.

a) Bestimme $\exp(tA)$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $t \in \mathbb{R}$.

b) Bestimme $\exp \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 11.2
Sei G eine lokalkompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen.
Zeige: G ist metrisierbar.

Aufgabe 11.3
Zeige: Es existiert eine lokalkompakte Gruppe G, in welcher jede offene Einsumgebung $U \subseteq G$ eine Involution (also ein Element $g \neq 1$ mit $g^2 = 1$) enthält.

Aufgabe 11.4
Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

ii) Alle konvergenten Teilfolgen von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ haben den gleichen Grenzwert.

Bitte wenden.

Definition: Ein *topologischer Vektorraum* über $\mathbb{R}$ ist ein reeller Vektorraum E mit einer Topologie $\mathcal{T}$ so, dass $(E, +)$ eine Hausdorff'sche topologische Gruppe und die Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$ eine stetige Abbildung ist.

***-Aufgabe**
Sei E ein topologischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

i) E ist endlich-dimensional.

ii) E ist lokalkompakt.

Hinweis: Für „$a) \Rightarrow b)$“ wähle eine Basis $v_1, \ldots, v_m$ von E und zeige, dass der Homomorphismus $f : \mathbb{R}^m \to E, (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i v_i$ eine stetige Umkehrabbildung besitzt.
Für die Implikation „$b) \Rightarrow a)$“ gehe in folgenden drei Schritten vor:
Schritt 1: Wähle eine kompakte Umgebung W von $0 \in E$ und zeige, dass es $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$ und eine endliche Teilmenge $A \subseteq W$ gibt so, dass $W \subseteq A + rW$ gilt.
Schritt 2: Definiere $F := \langle A \rangle$ als den von A aufgespannten Unterraum von E. Zeige, dass W in F enthalten ist. (Dies ist der schwierigste Schritt. Argumentiere per Widerspruch: Nehme an, es gibt $w \in W - F$ und finde eine offene Umgebung U von $0 \in E$ mit $(w + U) \cap F = \emptyset$. Beweise umgekehrt mit Hilfe von Wallace' Lemma, dass $W \subseteq F + U$ gilt.)
Schritt 3: Zeige, dass $E = F$ gilt.

Abgabe bis: Donnerstag, den 11.1.2018, 8 Uhr im Briefkasten 29