10. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18 Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 10.1
Sei G eine kompakte Gruppe und E ein Hilbert-G-Modul. Weiter sei $A \in B(E)$ ein beschränkter Operator auf E. Zeige:

a) Es existiert ein eindeutiger beschränkter Operator $A^\# \in B(E)$ mit

$$\langle u \mid A^\# v \rangle = \int_G \langle u \mid gAg^{-1}(v) \rangle dg$$

für alle $u, v \in E$. Weiter ist $A^\#$ eine G-äquivariante Abbildung, d.h. es gilt $A^\#(gu) = gA^\#(u)$ für alle $g \in G, u \in E$.

b) Ist E endlich-dimensional, so gilt für die Spur $\mathrm{tr}(A^\#) = \mathrm{tr}(A)$.

Hinweis: Benutze in b), dass für jede Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von E gilt $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i \mid e_i \rangle$.

Definition: Seien X, Y topologische Räume und $\mathcal{C}(X, Y)$ die Menge der stetigen Funktionen von X nach Y. Ist $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen, so sei $V(K, X) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}$. Die Topologie auf $\mathcal{C}(X, Y)$ mit Prä-Basis

$$\mathcal{B} = \{V(K, U) \mid K \subseteq X \text{ kompakt}, U \subseteq Y \text{ offen}\}$$

heißt die *kompakt-offene Topologie* auf $\mathcal{C}(X, Y)$. Eine Teilmenge $W \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ ist also genau dann offen bzgl. der kompakt-offenen Topologie, wenn es zu jedem $w \in W$ kompakte Teilmengen $K_1, \ldots, K_r \subseteq X$ und offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_r \subseteq Y$ mit $w \in V(K_1, U_1) \cap \ldots \cap V(K_r, U_r) \subseteq W$ gibt.

Aufgabe 10.2
Sei $X = [0, 1]$ und $Y = \mathbb{R}$ jeweils mit der üblichen Topologie. Sei $\mathcal{C}(X, Y)$ versehen mit der kompakt-offenen Topologie. Zeige: Eine Folge von stetigen Abbildungen $f_n : X \to Y$ konvergiert genau dann gegen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, wenn die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren.
Hinweis: Verwende, dass f gleichmäßig stetig ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 10.3
Sei G eine topologische Gruppe und $\widehat{G}$ die Menge aller Morphismen von G nach $U(1)$ versehen mit der von der kompakt-offenen Topologie auf $\mathcal{C}(G, U(1))$ induzierten Teilraumtopologie.

a) Zeige: Mit punktweiser Multiplikation als Verknüpfung bildet $\widehat{G}$ eine topologische Gruppe.

b) Bestimme die Gruppen $\widehat{\mathrm{Sym}(3)}, \widehat{\mathbb{Z}}, \widehat{\mathbb{R}}$ und $\widehat{U(1)}$.

Aufgabe 10.4
Bestimme alle Einparametergruppen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\times}$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 21.12.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29