1. Übungszettel zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Aufgabe 1.1
Zeige:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Morphismus der topologischen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$. Dann gibt es $r \in \mathbb{R}$ so, dass $f(t) = rt$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

b) Sei $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ wie in der Vorlesung und $f : U(1) \to U(1)$ ein Morphismus der topologischen Gruppe $(U(1), \cdot)$. Dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = z^n$ für alle $z \in U(1)$.

Aufgabe 1.2
Beweise, dass auf den folgenden topologischen Räumen keine Struktur einer topologischen Gruppe definiert werden kann.

a) $[0, 1]$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Teilraumtopologie

b) $\mathbb{N}$ mit der kofiniten Topologie $\mathcal{T}_{cof} = \{U \subseteq \mathbb{N} \mid U = \emptyset \text{ oder } \#(\mathbb{N} - U) < \infty\}$

Aufgabe 1.3
Sei G eine topologische Gruppe und $N(e)$ die Menge der Einsumgebungen. Zeige, dass für jede Teilmenge $X \subseteq G$ der Abschluss $\overline{X}$ von X gegeben ist durch

$$\overline{X} = \bigcap \{VX \mid V \in N(e)\}.$$

Aufgabe 1.4
Betrachte die topologische Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

a) Jede diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist zyklisch.

b) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist diskret.

Abgabe bis: Donnerstag, den 19.10.2017, 8 Uhr im Briefkasten 29