1. Quiz zur Vorlesung „Lokalkompakte Gruppen“
11. Dezember 2017, Abgabe in Briefkasten 29

WiSe 2017/18
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Nils Leder
Antoine Beljean

Name: **Übungsgruppe:**

Seien im Folgenden G und G' stets topologische Gruppen.

1. Jede diskrete Gruppe ist lokalkompakt.
   ☐ richtig ☐ falsch
2. Jeder metrische Raum (X, d) ist Baire'sch.
   ☐ richtig ☐ falsch
3. Ist $H \subseteq G$ eine offene Untergruppe von G, so ist H auch abgeschlossen.
   ☐ richtig ☐ falsch
4. Ist G lokalkompakt und unimodular sowie $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist auch H unimodular.
   ☐ richtig ☐ falsch
5. Sei $f : G \to G'$ ein beliebiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist f genau dann stetig, wenn f stetig im Punkt 1_G ist.
   ☐ richtig ☐ falsch
6. Sei G hausdorff'sch. Enthält G eine dichte abelsche Untergruppe H, so ist G abelsch.
   ☐ richtig ☐ falsch
7. Sei $f : G \to G'$ ein Morphismus von topologischen Gruppen und G' hausdorff'sch. Dann ist $\ker(f)$ ein abgeschlossener Normalteiler in G.
   ☐ richtig ☐ falsch
8. Jeder lokalkompakte Raum ist σ-kompakt.
   ☐ richtig ☐ falsch
9. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Morphismen der topologischen Gruppe $\mathbb{R}$. Gilt $f(t) = g(t)$ für ein $t \neq 0$, so gilt $f = g$.
   ☐ richtig ☐ falsch
10. Seien $f, g : U(1) \to U(1)$ Morphismen der topologischen Gruppe $U(1)$. Gilt $f(z) = g(z)$ für ein $z \in U(1) - \{1\}$, so gilt $f = g$.
    ☐ richtig ☐ falsch
11. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist zusammenhängend.
    ☐ richtig ☐ falsch

12. Es gibt eine nicht-diskrete topologische Gruppe G mit genau drei Zusammenhangskomponenten.
☐ richtig ☐ falsch

13. $\mathbb{Q}$ ist diskret.
☐ richtig ☐ falsch

14. Sei V eine Einsumgebung in G. Dann existiert eine offene symmetrische Einsumgebung U mit $U \cdot U \subseteq V$.
☐ richtig ☐ falsch

15. Sei G lokalkompakt. Dann steht die Menge der invarianten Integrale auf G in Bijektion zu $\mathbb{R}_{>0}$.
☐ richtig ☐ falsch

16. Jede endliche Gruppe ist unimodular.
☐ richtig ☐ falsch

17. Sei $E = \mathbb{C}[T]$ der komplexe Vektorraum der Polynome in einer Variable über $\mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$. Dann ist der Ableitungsoperator $\frac{d}{dT} : E \to E, f \mapsto \frac{df}{dT}$ ein kompakter Operator.
☐ richtig ☐ falsch

18. Sei E ein Hilbertraum und $T, S \in B(E)$ beschränkte lineare Operatoren auf E. Sind T und S kompakt, so ist auch ihre Summe $T+S$ ein kompakter Operator.
☐ richtig ☐ falsch

19. Für jeden Hilbertraum E ist id_E ein kompakter Operator auf E.
☐ richtig ☐ falsch

20. Sei G zusammenhängend und $U \subseteq G$ eine offene Einsumgebung. Dann gilt $\langle U \rangle = G$.
☐ richtig ☐ falsch

21. Sei G σ-kompakt und lokalkompakt. Existiert eine Familie von Einsumgebungen $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{1\}$, so ist G metrisierbar.
☐ richtig ☐ falsch

22. Es gibt einen nicht-trivialen Morphismus von topologischen Gruppen $f : U(1) \to \mathbb{R}$.
☐ richtig ☐ falsch