§4 Einparameter-Gruppen

1. **Def** Sei G eine topologische Gruppe. Eine <u>Einparameter-Gruppe</u> ist ein Morphismus von top. Gruppen

$$c : \mathbb{R} \to G$$

Beobachtungen.

- $c(\mathbb{R}) \subseteq G$ ist zush. Wenn G also total unzush. ist, so ist jede Einparameter-Gruppe in G trivial.
- Ist $c : \mathbb{R} \to G$ Einparameter-Gruppe, so ist für jedes $s \in \mathbb{R}$ auch $s \cdot c = [t \mapsto c(st)]$ eine Einparameter-Gruppe.
- Sind $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightrightarrows G$ zwei Einparameter-Gruppen und gibt es $\varepsilon > 0$ mit

  $$c_1(t) = c_2(t) \quad \text{für alle } t \text{ mit } |t| \leq \varepsilon$$

  so folgt $c_1 = c_2$, denn für jedes $s \in \mathbb{R}$ gibt es $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ mit

  $$\left|\tfrac{1}{m} s\right| < \varepsilon \Rightarrow c_1\left(\tfrac{1}{m} s\right) = c_2\left(\tfrac{1}{m} s\right)$$

  $$\Rightarrow c_1\left(m \tfrac{1}{m} s\right) = c_1\left(\tfrac{1}{m} s\right)^m = c_2\left(\tfrac{1}{m} s\right)^m$$

  $$= c_2\left(m \tfrac{1}{m} s\right)$$

Wir setzen $\mathcal{L}(G) = \{ c : \mathbb{R} \to G \mid c \text{ Morphism} \}$

Unser Ziel ist es, $\mathcal{L}(G)$ für "gute" Gruppen G zu einem <u>Vektorraum</u> zu machen, der <u>Lie-Algebra von G</u>. Zur Motivation betrachten wir Gruppen von Operatoren.

2. <u>Def</u> Eine <u>Banach-Algebra</u> A ist ein Banachraum (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), der gleichzeitig eine assoziative Algebra mit Einselement $1 \in A$ ist (ein Ring, und $z(u \cdot v) = (zu) \cdot v = u \cdot (zv)$), so dass gilt:

$$\|1\| = 1 \quad \text{und} \quad \|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

für alle $u, v \in A$.

<u>Beispiel</u> E Banachraum, $A = B(E)$ Raum der beschränkten Operatoren auf E. Insbesondere ist $\mathbb{C}^{n \times n}$ (zum Beispiel) bezüglich der Operatornorm eine Banachalgebra.

Die <u>Einheitengruppe</u> von A ist

$$A^\times = \{ x \in A \mid \text{es gibt } y \in A \text{ mit } xy = yx = 1 \}$$

Sei $\mathbb{C}[[z]]$ der Ring der formalen Potenzreihen.

Für $F = \sum_{n=0} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ ist der Konvergenzradius $r(F)$ gegeben durch $\frac{1}{r(F)} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$.

Für $x \in A$ setzen wir $F_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \in A$.

<u>Satz</u> Ist $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ mit Konvergenzradius $r > 0$ und ist A ein Banachalgebra, so konvergiert für jedes $0 < s < r$ die Funktionenfolge $f_m = [x \mapsto \sum_{k=0}^{m} a_k x^k]$ auf $B_s^A(0)$ gleichmäßig $^{(1)}$ gegen eine stetige Funktion $f : B_s^A(0) \to A$, $f(x) = \lim_m f_m(x)$.

⌜ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N \geq 0$ so, dass für alle $m, n \geq N$ gilt $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ ⌟

<u>Beweis</u> Mit Wurzelkriterium, der Beweis aus Analysis I funktioniert <u>verbatim</u>. $\square$

3. Drei Beispiele

(a) Die geometrische Reihe / Neumannsche Reihe

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \in \mathbb{C}[[z]] \quad \text{hat Konvergenzradius } r = 1$$

(denn $a_n = 1$ für alle $n \geq 0$)

Für jedes $s < 1$ ist also $\gamma : B_s^A(0) \to A$ stetig.

Wegen $\gamma_m = 1 + z + z^2 + \ldots + z^m$ gilt

$$(1-z)\cdot\gamma_m = 1 - z^{m+1} = \gamma_m \cdot (1-z) \quad \text{, im Limes also}$$

$$(1-x)\gamma(x) = 1 = \gamma(x)\cdot(1-x) \quad \text{für alle } x \in B_s^A(0)$$

d.h. für alle $|x| < 1$ ist $1 - x \in A^\times$ mit

Inversem $(1-x)^{-1} = \gamma(x)$

(b) Die Mercatorsche Reihe

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \in \mathbb{C}[[z]] \quad \text{hat}$$

Konvergenzradius $r = 1$ (üA) #

(c) Die Exponentialreihe

$$\exp = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \in \mathbb{C}[[z]] \quad \text{hat}$$

Konvergenzradius $r = \infty$, denn

$$\limsup_n \left|\frac{1}{n!}\right|^{1/n} = 0 \quad \text{(üA)}$$

4. <u>Satz</u> Sei A eine Banach Algebra. Dann ist die Einheitengruppe $A^\times \subseteq A$ offen und $A^\times$ ist eine topologische Gruppe.

<u>Bew.</u> Sei $W = \{ w \in A \mid \|w-1\| < 1 \}$.
Für $w \in W$ ist $w^{-1} = \gamma(1-w)$, also
$A^\times = \bigcup \{ \lambda_a W \mid a \in A^\times \}$ offen, denn für $a \in A^\times$ ist $\lambda_a : x \mapsto ax$ Homöomorphismus mit Inverse $\lambda_{a^{-1}}$. Wegen $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$ ist die Multiplikation auf A stetig. Ist $x \in A^\times$, so ist $xW \subseteq A^\times$ offene Umgebung von x.
Für $xw \in xW$ gilt $(xw)^{-1} = w^{-1}x^{-1} = \gamma(1-w)x^{-1}$, also ist die Inversion stetig auf xW. □

5. <u>Erinnerung</u> Sind E, F Banachräume, $V \subseteq E$ offen, $f: V \to F$ stetig, so ist f <u>differenzierbar</u> im Punkt $v \in V$, wenn es $\varepsilon > 0$ gibt mit $B^E_\varepsilon(v) \subseteq V$, $T \in B(E,F)$ und $p : B^E_\varepsilon(0) \to F$ stetig mit $p(0) = 0$, so dass

$$f(x+h) - f(x) = Th + \|h\| \, p(h)$$

für alle $h \in B^E_\varepsilon(0)$ gilt.

Dann ist T eindeutig bestimmt. Man setzt $Df(x) = T$ und nennt $Df(x)$ Ableitung von f in x. (üA)

Es gilt die Kettenregel:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & F \\ \cap\!| & & \cap\!| & & \\ D & & E & & \end{array}$$

$$D(g \circ f)x = Dg(f(x)) \circ Df(x)$$

die Produktregel usw. wie gewohnt.

Ist $f \in \mathbb{C}[[z]]$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ so setzt man $f' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$. Dann hat f' den gleichen Konvergenzradius wie f (üA)

<u>Satz</u> Sei A eine <u>kommutative</u> Banachalgebra. Ist $f \in \mathbb{C}[[z]]$ mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist $f : U \to A$ auf $U = \{x \in A \mid \|x\| < r\}$ stetig diff'bar. Für die Ableitung gilt

$$Df(x) = [h \mapsto f'(x)h]$$

<u>Beweis</u> Der Beweis aus Analysis I überträgt sich verbatim. □

Ist also A kommutativ, so gilt

$$D\mu(x) = \gamma(-x) \qquad \text{für } \|x\| < 1$$

$$D\exp(x) = \exp(x) \qquad \text{für } x \in A.$$

6. <u>Satz</u> Sei A eine <u>kommutative</u> Banachalgebra.

Dann gilt:

(a) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, insbesondere gilt $\exp(-x) \in A^\times$ und $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$.

(b) Für $u \in A$ mit $\|u\| < 1$ gilt

$$\exp(\mu(u)) = 1 + u$$

(c) Für $w \in A$ mit $\|w\| < \log(2)$ gilt $\mu(\exp(w) - 1) = w$

<u>Beweis</u> (a) Der Beweis mit Cauchys Produktsatz aus Analysis I überträgt sich verbatim.

b) Wir setzen $\alpha(t) = \exp(\mu(tu))$ $\quad |t| \cdot \|u\| < 1$

Es folgt $\dot{\alpha}(t) = \exp(\mu(tu))\, \gamma(-tu)\, u$

$$= \alpha(t)\,(1+tu)^{-1} u$$

$\Rightarrow (1+tu)\cdot\dot{\alpha}(t) = u\,\alpha(t)$ $\quad$ ableiten

$$u\,\dot{\alpha}(t) + (1+tu)\,\ddot{\alpha}(t) = u\,\dot{\alpha}(t)$$

$$\underbrace{(1+tu)}_{\in A^\times}\ddot{\alpha}(t) = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\alpha}(t) = 0$$

$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha(0) + \dot{\alpha}(t)\cdot t = \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)\cdot t$

$\alpha(0) = \exp(\mu(0)) = \exp(0) = 1$

$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0)\, 1 \cdot u = u$

$\Rightarrow \alpha(t) = 1 + tu$ $\quad$ insbesondere $\exp(\mu(u)) = 1+u$

c) Wir setzen $\beta(t) = \mu(\exp(tw) - 1)$ $\quad |t| \cdot \|w\| < \log(2)$

$\Rightarrow \|\exp(tw) - 1\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|tw\|^k < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |\log 2|^k$

$= \exp|\log 2| - 1 = 1$

$\dot{\beta}(t) = \gamma(1 - \exp(tw))\, \exp(tw)\cdot w$

$$= (\exp(tw))^{-1} \exp(tw)\cdot w = w$$

$\Rightarrow \beta(t) = \beta(0) + \dot{\beta}(t)\, t = 0 + tw$

$\Rightarrow \mu(\exp(w) - 1) = w$

<u>Korollar</u> Sei A eine Banachalgebra. Dann gilt mit $\log(x) := \mu(x-1)$

(a) Für $x, y \in A$ mit $xy = yx$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

insbesondere $\exp(x) \in A^\times$ und $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$

(b) $\exp(\log(x)) = x$ für $\|x-1\| < 1$

(c) $\log(\exp(x)) = x$ für $\|x\| < \log(2)$
$(e^{\|x\|} < 2)$

<u>Beweis</u> (a) Sei $B = \overline{\mathbb{C}[x,y]} \subseteq A$, wende den vorigen Satz auf die kommutative Banachalgebra B an

(b) Sei $B = \overline{\mathbb{C}[x]} \subseteq A$ $\Rightarrow$ B kommutativ

(c) Sei $B = \overline{\mathbb{C}[x]} \subseteq A$ $\Rightarrow$ B kommutativ $\square$

<u>Korollar</u> Es gibt ein $r > 0$ so, dass die Menge $U = \{u \in A \mid \|u\| < r\}$ homöomorph durch $\exp$ auf eine (offene) Einsumgebung $V = \exp(U) \subseteq A^\times$ abgebildet wird.

7. Satz Sei A eine Banachalgebra. Dann hat $A^\times$ keine kleinen Untergruppen. Insbesondere hat jede Untergruppe $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ keine kleinen Untergruppen.

Beweis Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp: A \to A^\times$ den Ball $B_{2\varepsilon}(0)$ homöomorph auf eine Einsumgebung $V \subseteq A^\times$, $V = \exp(B_{2\varepsilon}(0))$ abbildet (nach §4.6 ist log eine lokale Umkehrfunktion von exp). Sei $W \subseteq A^\times$ das Bild von $U = \{u \in A \mid \|u\| < \varepsilon\} \subseteq A$. Für jedes $u \in U - \{0\}$ gibt es ein größtes $n = n(u) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $\|nu\| < \varepsilon$, also $\|(n+1)u\| \geq \varepsilon$. Ist $g \in W - \{1\}$, $g = \exp(u)$, $u \in U$, so folgt $g^{n(u)+1} \notin W$, denn $g^{n(u)+1} = \exp((n+1)u) \in V - W$. Also enthält W keine Untergruppe $H \neq \{1\}$. $\square$

Korollar Sei G eine kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent: (i) G hat keine kleinen Untergruppen
(ii) G ist isomorph zu einer

abgeschlossenen Untergruppe $H \subseteq U(m) \subseteq GL_m\mathbb{C}$ für ein $m \geq 1$.

Beweis Das folgt aus §4.7 und § 3.24 $\square$

8. Lemma Sei A eine Banachalgebra, sei $r > 0$ so, dass $\exp : A \to A^\times$ die Menge $U = \{u \in A \mid \|u\| < r\}$ homöomorph auf eine offene Einsumgebung $V = \exp(U)$ abbildet. Für jedes $g \in V - \{1\}$ und jedes $l \geq 1$ gibt es dann genau ein $h \in V$ mit $h^l = g$.

Beweis Schreibe $g = \exp(u)$ $u \in U$. Für $h = \exp(\frac{1}{l}u)$ gilt dann $h^l = g$. Ist $\tilde{h} \in V$ mit $\tilde{h}^l = g$, so schreibe $\tilde{h} = \exp(w)$, $w \in U$. Es folgt $lw = u \Rightarrow w = \frac{1}{l}u \Rightarrow \tilde{h} = h$ $\square$

Satz Sei A eine Banachalgebra, sei $c : \mathbb{R} \to A^\times$ eine Einparametergruppe. Dann gibt es genau ein $x \in A$ mit $\exp(tx) = c(t)$.

Beweis Wähle $r > 0$ so, dass $U = \{u \in A \mid \|u\| < r\} \subseteq A$ via exp homöomorph auf eine offene Einsumgebung $V \subseteq A^\times$ abgebildet wird.

Da c stetig ist, gibt es $m \geq 1$ so, dass $c([-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]) \subseteq V$ gilt. Sei $u \in U$ mit $\exp(u) = c(\frac{1}{m})$.
Für $x = mu$ gilt dann $\exp(x) = c(1)$.
Für $\overset{\text{alle}}{} 0 \leq s \leq \frac{1}{m}$ und $l \geq 1$ gilt dann nach dem vorig. Lemma $c(\frac{1}{lm}) = \exp(\frac{1}{lm} x)$, also folgt

$c(q) = \exp(qx)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht ist, folgt $c(q) = \exp(qx)$ für alle $q \in \mathbb{R}$. $\square$

9. Lemma Sei A eine Banachalgebra. Dann gilt

$$\exp(tx)\exp(ty) = \exp(t(x+y) + \tfrac{1}{2}t^2 [x,y]_{lin} + t^3 \underbrace{\lambda(t)}_{\text{stetig}})$$

$[x,y]_{lin} = xy - yx$ linearer Kommutator

Beweis $\exp(tx)\exp(ty) = 1 + tx + ty + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{2}t^2y^2 + t^2xy + t^2yx + t^3 \cdot (\text{stetig})$

Setze $\alpha(t) = \log(\exp(tx)\exp(ty))$ (für t nahe 0)

$\log(w) = \mu(w-1)$ $\qquad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \dots$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \mu\left(tx + ty + \tfrac{1}{2}t^2x^2 + \tfrac{1}{2}t^2y^2 + t^2xy + t^2yx + t^3(\text{stetig})\right)$$

$$= t(x+y) + \tfrac{1}{2}(t^2x^2 + t^2y^2) + t^2(xy+yx) + t^3 \cdot (\text{stetig})$$

$$- \tfrac{1}{2}(t(x+y))^2 + t^3 \cdot (\text{stetig})$$

$= t(x+y) + \frac{t^2}{2}(xy-yx) + t^3 \cdot (\text{stetig})$ $\square$

<u>Korollar</u> Sei A ein Banach algebra. Dann gilt

$$\exp(x+y) = \lim_n \left(\left(\exp(\tfrac{1}{n}x) \exp(\tfrac{1}{n}y) \right) \right)^n$$

<u>Beweis</u> $\left(\exp(\frac{1}{n}x) \exp(\frac{1}{n}y) \right)^n = \exp\left(n \left(\frac{1}{n}(x+y) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}[x,y]_{lin} + \frac{1}{n^3}(\text{stetig}) \right) \right)$

$= \exp\left(x+y + \frac{1}{n}[x,y]_{lin} + \frac{1}{n^2}(\text{stetig}) \right)$ $\square$

<u>Korollar</u> Sei A ein Banach algebra. Dann gilt

$$\exp([x,y]_{lin}) = \lim_n \left(\left[\exp(\tfrac{1}{n}x), \exp(\tfrac{1}{n}y) \right]^{n^2} \right)$$

↑ Gruppenkommutator.

<u>Beweis</u> $\left[\exp(\frac{1}{n}x), \exp(\frac{1}{n}y) \right] = \exp\left(\frac{1}{n}(x+y) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}[x,y]_{lin} + \frac{1}{n^3}(\text{stetig}) \right)$

$\cdot \exp\left(-\frac{1}{n}(x+y) + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}[x,y]_{lin} + \frac{1}{n^3}(\text{stetig}) \right)$

$= \exp\left(\frac{1}{n^2}[x,y]_{lin} + \frac{1}{n^3}(\text{stetig}) \right)$

also $\left[\exp(\frac{1}{n}x), \exp(\frac{1}{n}y) \right]^{n^2} = \exp\left([x,y]_{lin} + \frac{1}{n}(\text{stetig}) \right)$ $\square$

<u>Fazit</u> • Via $\exp: A \to A^\times$ erhalten wir nahe 0 einen Homöomorphismus auf eine Einsumgebung in $A^\times$.

• exp ist kein Gruppenhomomorphismus (wenn A nicht kommutativ ist – sonst schon!)

• es gilt aber: $t \mapsto \exp(tx)$ ist für jedes $x \in A$ eine Einparametergruppe und jede Einparametergruppe ist von dieser Form.

• Ist $c_1(t) = \exp(tx)$ $c_2(t) = \exp(ty)$, so gilt für $c_3(t) = \exp(t(x+y))$, dass

$$c_3(t) = \lim_n \left(c_1(\tfrac{1}{n}t)\, c_2(\tfrac{1}{n}t)\right)^n$$

Wir gehen jetzt zurück zu lokal kompakten Gruppen.

<u>Erinnerung</u> Nach § 2.6 hat eine lokal kompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen eine metrisierbare offene Untergruppe. Insbesondere dürfen wir in so einer Gruppe mit Folgen argumentieren.

10. Satz Sei G eine lokal kompakte Gruppe, die keine kleinen Untergruppen hat. Dann gibt es eine Einsumgebung $U \subseteq G$ so, dass die Abbildung

$$U \to G, \quad g \mapsto g^2 \quad \text{injektiv ist.}$$

Beweis: Angenommen, das wäre falsch. Sei $V \subseteq G$ eine kompakte symmetrische Einsumgebung, die keine Untergruppe $H \neq \{e\}$ enthält. Dann existieren Elemente $x_n, y_n \in V$ mit $x_n \neq y_n$, $x_n^2 = y_n^2$ und $\lim_n x_n = e = \lim_n y_n$. Setze $z_n = x_n^{-1} y_n$. Es folgt $\lim_n z_n = e$ und es gilt

$$x_n z_n x_n^{-1} = y_n x_n^{-1} = y_n^{-1} y_n^2 x_n^{-1} = y_n^{-1} x_n = z_n^{-1}$$

Wir können annehmen, dass alle z_n in V liegen (Teilfolge).

Zu jedem n gibt es ein größtes $m(n) \geq 1$ mit

$$z_n^m \in V, \quad z_n^{m+1} \notin V.$$

Betrachte die Folge $(z_n^{m(n)})$ in V. Da V kompakt ist, können wir annehmen, dass diese Folge gegen ein Element $g \in V$ konvergiert,

$\lim_n z_n^{m(n)} = g \in V$. Es folgt $\lim_n \underbrace{z_n^{m(n)} z_n}_{\notin V} = g \cdot e = g$

und damit $g \neq e$.

Weiter gilt $\lim_n x_n z_n^{m(n)} x_n^{-1} = \lim_n z^{-m(n)} = g^{-1}$

$$\begin{array}{c} \| \\ ege = g \end{array}$$

$\Rightarrow$ g ist Involution, $\langle g \rangle \subseteq V$ $\lightning$ $\square$

11. Konvention Ist U eine Einsumgebung der topologischen Gruppe G, so sei

$$S(U) = \{ (\underline{a}, \underline{m}) \mid \underline{a} \text{ Folge in } U, \underline{m} \text{ Folge in } \mathbb{N} \text{ mit } a_k, a_k^2, \dots, a_k^{m_k} \in U \}$$

Für jedes k liegen also die ersten m_k Potenzen von a_k noch in U.

Lemma Sei G eine lokal kompakte Gruppe, sei $U \subseteq G$ eine symmetrische kompakte Einsumgebung, die keine echten Untergruppen enthält.
Sei $(\underline{a}, \underline{m}) \in S(U)$ und sei $V \subseteq G$ eine beliebige Einsumgebung. Dann existiert eine Zahl $r = r_V > 0$ so, dass für alle $k \geq 0$ und $s \in [0, r]$

gilt $a_k^{\lfloor s m_k \rfloor} \in V$, wobei

$$\lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$$

<u>Beweis</u> Angenommen, das ist falsch. Dann gibt es eine Folge $(r_k)_{k\geq 0}$, $r_k > 0$, $\lim_k r_k = 0$

so, dass $a_k^{\lfloor r_k m_k \rfloor} \notin V$ für unendlich viele k.

Nach Übergang auf eine Teilfolge können wir annehmen, dass $a_k^{\lfloor r_k m_k \rfloor} \notin V$ für alle k <u>und</u>

$\lim_k a_k^{\lfloor r_k m_k \rfloor} = g$ existiert. Es folgt $g \neq e$.

Für $l \geq 1$ folgt $\lim_k a_k^{\lfloor r_k m_k \rfloor l} = g^l$.

Da $\lfloor r_k m_k \rfloor l \leq r_k m_k l \leq m_k$ für $k \gg 1$ gilt, folgt $g^l \in U$ für alle $l \geq 1$. Da U symmetrisch ist, ist $\langle g \rangle \subseteq U$ ↯ $\square$

12. <u>Konvention</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen. Eine Einsumgebung $U \subseteq G$ heißt <u>gut</u>, wenn gilt:
   (a) U ist kompakt und symmetrisch
   (b) U enthält keine echten Untergruppen
   (c) Die Abbildung $\square : G \to G$, $g \mapsto g^2$ ist auf U injektiv.

Nach §4.10 gibt es gute Einsumgebungen in G.

13. Satz Sei G eine lokal kompakte Gruppe und sei $U \subseteq G$ eine gute Einsumgebung. Sei $(\underline{a}, \underline{m}) \in S(U)$ mit $\lim_k a_k = e$ und mit $\lim_k a_k^{m_k} = c_1$. Dann existiert für jedes $t \in [0,1]$ der Grenzwert $\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = c_t$ und es gibt genau eine Einparametergruppe $c : \mathbb{R} \to G$ mit $c_t = c(t)$ für alle $t \in [0,1]$

Beweis in kleinen Schritten.

(a) Falls $\lim_k a_k^{\lfloor s m_k \rfloor} = c_s$ und $\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = c_t$ existieren, dann auch $\lim_k a_k^{\lfloor (s+t) m_k \rfloor} = c_{s+t}$

und $c_{s+t} = c_s c_t$

Denn: $\left| \lfloor s m_k \rfloor + \lfloor t m_k \rfloor - \lfloor (s+t) m_k \rfloor \right| \leq 1$ und $\lim_k a_k = e$ □

(b) Falls $\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = c_t$ existiert, so auch

$\lim_k a_k^{\lfloor \frac{1}{2} t m_k \rfloor} = c_{\frac{1}{2} t}$

Denn: Sind x, y Häufungspunkte der Folge $\left(a_k^{\lfloor \frac{1}{2} t m_k \rfloor} \right)_{k \geq 0}$, so folgt mit (a), dass $x^2 = c_t = y^2$. Da U gut ist, folgt $x = y$. □

(c) Für jedes $q \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cap [0,1]$ existiert

$$\lim_k a_k^{\lfloor q m_k \rfloor} = c_q$$

Das folgt aus (b).

(d) Für jedes $t \in [0,1]$ existiert $\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = c_t$.

<u>Denn</u>: Seien x, y Häufungspunkte dieser Folge und sei $W \subseteq G$ eine beliebige Einsumgebung. Wir zeigen $x^{-1}y \in W$. Es folgt $x^{-1}y = e$ und damit die Konvergenz der Folge.

Dazu sei $V \subseteq W$ kompakte Einsumgebung mit $V^{-1}V \subseteq W$.

Wir wählen $r_V > 0$ wie in Lemma § 4.10.

Für alle $s \in [0, r_V]$ gilt also $a_k^{\lfloor s m_k \rfloor} \in V$.

Sei nun $q \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ mit $0 < q < t$ und $t - q < r_V$. Es gilt $\lim_k a_k^{\lfloor q m_k \rfloor} = c_q$.

Es gibt eine unendliche Teilmenge $K \subseteq \mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k \in K} a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = x$$

<u>und</u> mit

$$\lim_{k \in K} a_k^{\lfloor (t-q) m_k \rfloor} = z \in V$$

Es folgt mit (b), dass $c_q \cdot z = x$

Entsprechend gibt es eine unendliche Menge $L \subseteq \mathbb{N}$ mit $\lim\limits_{l\in L} a_l^{\lfloor t m_l \rfloor} = y$ und

$$\lim_{l\in L} a_l^{\lfloor (t-q) m_l \rfloor} = z' \in U, \qquad c_q \cdot z' = y$$

Es folgt $x^{-1} y = z^{-1} z' \in W$ □

(e) Wir definieren für $t \in \mathbb{R}$, $t = \lfloor t \rfloor + t_0$, $0 \le t_0 < 1$

$$(*) \qquad c(t) = c_1^{\lfloor t \rfloor} \cdot c_{t_0}$$

Es folgt $c(t) = c_t$ für $t \in [0,1]$. Weiter gilt für $s,t \in \mathbb{R}$ $\lfloor s+t \rfloor = \lfloor s \rfloor + \lfloor t \rfloor + s_0 + t_0$, aus (b) folgt $c(s)c(t) = c(s+t)$. Damit ist c ein Homomorphismus. Jeder Homomorphismus $\tilde{c} : \mathbb{R} \to G$ mit $\tilde{c}(t) = c_t$ für $t \in [0,1]$ muss die Gleichung (*) erfüllen $\Rightarrow \tilde{c} = c$ eindeutig.

Ist $W \subseteq G$ symmetrische (kompakte) Einsumgebung, so existiert nach §4.10 ein $r_W > 0$ so, dass für alle $s \le r_W$ gilt $c(s) \in W \underset{W \text{ sym.}}{\Rightarrow} c(s) \in W$ für alle $s \in [-r_W, r_W]$. Folglich ist c stetig in 0 und damit stetig.

□

Korollar Sei G lokal kompakt und nicht diskret. Wenn G keine kleinen Untergruppen hat, so gibt es in G nichttriviale Einparametergruppen.

Beweis Sei $U \subseteq G$ eine gute Einsumgebung.

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in $U - \{e\}$ mit $\lim_n a_n = e$. Solch eine Folge existiert, da G nicht diskret ist. Sei $m(n) = \max\{k \mid a_n^k \in U\}$ so $m(n) \neq \infty$ (sonst $\langle a_n \rangle \subseteq U$ ↯). Durch Übergang auf eine Teilfolge können wir annehmen, dass $c_1 = \lim_n a_n^{m(n)}$ existiert. Da $a_n^{m(n)} \cdot a_n \notin U$ und $\lim_n a_n = e$ folgt $c_1 \neq e$. Die entsprechende Einparametergruppe $c : \mathbb{R} \to G$ ist also nichttrivial. $\square$

Der Übergang auf konvergente Teilfolge läßt sich mit folgendem Trick komplett vermeiden.

14. <u>Def</u> Eine Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ in einem Hausdorff-Raum X läßt sich als Abbildung $\underline{a} : \mathbb{N} \to X$ auffassen. Die Folge heißt <u>kompakt</u>, falls die Folgenglieder alle in einer kompakten Menge $C \subseteq X$ liegen. Äquivalent dazu: $\overline{\{a_n \mid n \geq 0\}} \subseteq X$ ist kompakt.

Betrachte nun die Čech-Stone Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ des lokal kompakten diskreten Raums $\mathbb{N}$ (vgl. GATG).

Die definierende Eigenschaft von $\beta\mathbb{N}$ ist folgende:

- $\beta\mathbb{N}$ ist kompakt
- jede kompakte Folge $\underline{a} : \mathbb{N} \to X$ hat <u>genau eine</u> stetige Fortsetzung $\beta\underline{a} : \beta\mathbb{N} \to X$

⌜ Es folgt: $\mathbb{N}$ ist dicht in $\beta\mathbb{N}$, für $\mathbb{N} = K \cup L$ gilt
$\beta\mathbb{N} = \overline{K} \cup \overline{L}$ → ÜA ⌟

Wir wählen einen Punkt $\omega \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ und definieren

$$\omega\text{-}\lim_k a_k = \beta(\underline{a})(\omega) \in \overline{\{a_n \mid n \geq 0\}}.$$

Aus der universellen Eigenschaft von $\beta\mathbb{N}$ folgt direkt:

(a) Ist $f: X \to Y$ stetig, $\underline{a}: \mathbb{N} \to X$ kompakte Folge, so gilt $\omega\text{-}\lim_k f(a_k) = f(\omega\text{-}\lim_k a_k)$

(b) Falls $x = \lim_k a_k$, so auch $x = \omega\text{-}\lim_k a_k$

(c) Ist $h: X_1 \times \dots \times X_m \to Y$ stetig und ist $\underline{a}_j$ kompakte Folge in X_j, so gilt

$$\omega\text{-}\lim_k h(a_{k,1}, \dots, a_{k,m}) = h(\omega\text{-}\lim_k a_{k1}, \dots, \omega\text{-}\lim_k a_{km})$$

Beweis (a) Da $f \circ \beta\underline{a} : \beta\mathbb{N} \to Y$ stetige Fortsetzung von $f \circ \underline{a}$ ist, folgt $\beta(f \circ \underline{a}) = f \circ \beta\underline{a}$. □

(b), (c) ähnlich → ÜA

Wir erhalten damit einen ganz kurzen Beweis für die Existenz von Einparametergruppen.

15. Def Sei $U \subseteq G$ eine kompakte symmetrische Einsumgebung der lokal kompakten Gruppe G. Eine Folge $(a_k, m_k)_{k \geq 0}$ in $U \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ heißt kontrolliert, wenn $\lim_k a_k = e$ und wenn

$$a_k, a_k^2, \dots, a_k^{m_k} \in U \quad \text{für jedes } k \geq 0.$$

Sei $CS(G, U)$ die Menge aller kontrollierten Folgen in U. Sei $\mathcal{L}(G, U)$ die Menge aller Einparameter-

Gruppen $c : \mathbb{R} \to G$ mit $c([0,1]) \subseteq U$.

<u>Satz</u> Für $(a_k, m_k)_{k \geq 0} \in CS(G,U)$ setzen wir $c(t) = w\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor}$. Falls U keine Untergruppe $\neq \{e\}$ enthält, so ist $c \in \mathcal{L}(G,U)$.

<u>Beweis</u> Schreibe $t = t_0 + t_1$, $t_0 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq t_1 < 1$.
Dann gilt $\lfloor t m_k \rfloor = t_0 m_k + \lfloor t_1 m_k \rfloor$, also gilt $b_k = a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} \in U^{|t_0|} \cdot U$ und $(b_k)_{k \geq 0}$ kompakte Folge, damit existiert $w\text{-}\lim_k b_k = c(t)$.
Für $t \in [0,1]$ ist $c(t) \in U$. Für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt $a_k^{\lfloor s m_k \rfloor} a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = a_k^{\lfloor (s+t) m_k \rfloor} a_k^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k \in \{0,1\}$. Da $\lim_k a_k^{\varepsilon_k} = e$ gilt, folgt

$$w\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor (s+t) m_k \rfloor} = w\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor (s+t) m_k \rfloor} a_k^{\varepsilon_k}$$
$$= w\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor s m_k \rfloor} \cdot a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = w\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor s m_k \rfloor} \cdot w\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor},$$

d.h. $c(s+t) = c(s)c(t)$.

Angenommen, c ist unstetig. Dann ist c auch unstetig in 0 ($\to$ Lemma §1.5)

Also gibt es ein symmetrische Einsumgebung $V \subseteq G$ sowie $t_k \in [0,1]$ mit $t_k \leq 2^{-k}$, $c(t_k) \notin V$.

Setze $g = \omega\text{-}\lim_k c(t_k) \Rightarrow g \neq e$. Es gilt

$c(t_k)^n \in U$ für $n \leq 2^k \Rightarrow g^n \in U$ für alle $n \geq 0$

$\Rightarrow \langle g \rangle \subseteq U$ ↯ $\square$

<u>Bem</u> Wir erhalten so eine Abbildung

$$F_\omega : CS(G,U) \to \mathcal{L}(G,U)$$
$$(a_k, m_k)_{k\geq 0} \mapsto c = [t \mapsto \omega\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor}]$$

Diese Abbildung ist <u>surjektiv</u>: Für $c \in \mathcal{L}(G,U)$ setze $m_k = 2^k$, $a_k = c(2^{-k}) \Rightarrow (a_k, m_k)_{k\geq 0} \in CS(G,U)$.

Für $t \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ und $k \gg 0$ gilt $a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} = c(t)$,

für $\tilde{c} = F_\omega(a_k, m_k)_{k\geq 0}$ gilt also $\tilde{c}(t) = c(t)$ für alle $t \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cap [0,1] \Rightarrow \tilde{c} = c$ $\square$

16. Wir betrachten im Folgenden $C_c(G)$ mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ als $\mathbb{R}[G]$-Modul, wie in §2.

Für $c \in \mathcal{L}(G)$, $\psi \in C_c(G)$ betrachte die Abbildung $f: \mathbb{R} \to C_c(G)$, $t \mapsto c(t)\psi$ wobei $(c(t)\psi)(x) = \psi(c(-t)x)$.

Lemma Die Abbildung f ist differenzierbar genau dann, wenn sie in $t=0$ diff'bar ist. In diesem Falle setzen wir

$$D_c \psi = \frac{d}{dt} c(t)\psi \Big|_{t=0} \in C_c(G)$$

Bew: Wenn f in $t=0$ diff'bar ist gibt es $\varphi \in C_c(G)$ sowie $\alpha: \mathbb{R} \to C_c(G)$ stetig mit $\alpha(0) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(t) - f(0) = t\varphi + |t|\alpha(t) \\ \quad\quad \| \\ c(t)\psi - \psi \end{array}\right\} c(t)\psi = \psi + t\varphi + |t|\alpha(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(s+t) - f(s) &= c(s+t)\psi - c(s)\psi \\ &= c(s)\big(c(t)\psi - \psi\big) = c(s)\big(t\varphi + |t|\alpha\big) \\ &= t\, c(s)\varphi + |t|\, c(s)\alpha(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f diff'bar in s.

$$\frac{d}{dt} f \Big|_{t=0} = \varphi \in C_c(G) \qquad \square$$

Definition Ein Element $\varphi \in C_c(G)$ heißt **differenzierbar**, falls für jedes $c \in \mathcal{L}(G)$ die Abbildung $t \mapsto c(t)\varphi$ diff'bar ist.

Das nächste Ziel ist es, die Existenz diff'barer Funktion auf G zu zeigen, falls G keine kleinen Untergruppen hat.

Dazu brauchen wir folgende Version des Satzes von Arzela-Ascoli:

17. **Satz** Sei X kompakt und sei $(\Theta_k)_{k \geq 0}$ eine beschränkte Folge von gleichgradig stetigen reellen Funktionen auf X. Setze $\Theta(x) = \omega\text{-}\lim_k \Theta_k(x)$. Dann ist Θ stetig und $\omega\text{-}\lim_k \|\Theta - \Theta_k\|_\infty = 0$. ⊣

Bew: Da die Folge beschränkt ist, gibt es $r \geq 0$ mit $|\Theta_k(x)| \leq r$ für alle k, x. Folglich existiert $\omega\text{-}\lim_k \Theta_k(x) = \Theta(x)$.

Da die Folge gleichgradig stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in X$ eine Umgebung V von x so, dass $|\Theta_k(x) - \Theta_k(y)| \leq \varepsilon/3$ für alle $k \geq 0$, alle $y \in V$.

Es folgt $|\Theta_k(x) - \Theta(y)| \leq \varepsilon/3$ und Θ ist stetig.

Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_m \in X$ mit solchen Umgebungen $V_1, \dots, V_m$ mit $X = V_1 \cup \dots \cup V_m$.
Sei $U \subseteq \beta\mathbb{N}$ Umgebung von ω so, dass für $j = 1, \dots, m$ gilt: $|\Theta_k(x_j) - \Theta(x_j)| \leq \varepsilon/3$ für alle $k \in U \cap \mathbb{N}$.
Für $y \in V_j$ beliebig, $k \in U \cap \mathbb{N}$ gilt dann

$$|\Theta_k(y) - \Theta(y)| \leq |\Theta_k(y) - \Theta_k(x_j)| + |\Theta_k(x_j) - \Theta(x_j)| + |\Theta(x_j) - \Theta(y)| \leq \varepsilon$$

Da $\omega \in \overline{U \cap \mathbb{N}}$ (üA) gilt, folgt

$$\omega\text{-}\lim_k |\Theta_k(y) - \Theta(y)| \leq \varepsilon \qquad \square$$

Der folgende Satz bringt kontrollierte Folgen und Diff'barkeit zusammen.

18. **Satz** Sei G eine lokalkompakte Gruppe, sei $U \subseteq G$ eine kompakte Einsumgebung, die keine nicht trivialen Untergruppen enthält. Sei $(a_k, m_k)_{k \geq 0} \in CS(G, U)$ mit zugehöriger Einparametergruppe $c \in \mathcal{L}(G, U)$.
Sei $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ eine Folge in $C_c(G)$ sowie $\varphi \in C_c(G)$ mit $\omega\text{-}\lim_k \|\varphi_k - \varphi\|_\infty = 0$. Setze

$$\Theta_k = m_k(a_k \varphi_k - \varphi_k) \in C_c(G).$$

Angenommen, $\lim_k m_k = \infty$.

Falls die Folge $(\Theta_k)_{k\geq 0}$ gleichgradig stetig und beschränkt ist und falls es $G' \subseteq G$ kompakt gibt mit $\operatorname{supp}(\Theta_k) \subseteq G'$ für alle $k \geq 0$, dann ist $f(t) = C(t)\varphi$ diff'bar und

$$D_C \varphi = \Theta : \qquad \Theta(x) = w\text{-}\lim_k \Theta_k .$$

<u>Beweis</u> Wir wenden Satz §4.17 an auf die Folge $(\Theta_k|_{G'})_{k\geq 0}$ und erhalten $\Theta \in C_c(G)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es $r > 0$ gibt so, dass

$$\| C(t)\varphi - \varphi - t\,\Theta \|_\infty \leq \varepsilon \cdot |t| \qquad (\text{Diff'barkeit in } t=0)$$

Da $x \mapsto \Theta(x^{-1})$ kompakten Träger hat, gibt es eine symmetrische Einsumgebung W so, dass $|\Theta(ax) - \Theta(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $a \in W$, $x \in G$ gilt, vgl §2.12.

Nach §4.11 gibt es $r > 0$ so, dass für alle $t \in [0,r]$ gilt $a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} \in W$. Es folgt $a_k^j \in W$ für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $|j| \leq \lfloor r m_k \rfloor$.

Sei $t \in [-r, r]$ und $k \geq 0$. Schreibe

$$\lfloor t m_k \rfloor = \varepsilon_k n_k \qquad n_k \geq 0 \qquad \varepsilon_k = \pm 1$$

Es gilt

$$m_k (a_k^{\varepsilon_k n_k} - e) \psi_k - \varepsilon_k n_k \Theta$$

$$= \sum_{j=0}^{n_k-1} \left(m_k a_k^{\varepsilon_k j} (a_k^{\varepsilon_k} - e) \psi_k - \varepsilon_k \Theta \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n_k-1} \left(a_k^{\varepsilon_k j} (m_k (a_k^{\varepsilon_k} - e) \psi_k - \varepsilon_k \Theta \right) - \sum_{j=0}^{n_k-1} (a_k^{\varepsilon_k j} \varepsilon_k \Theta - \varepsilon_k \Theta)$$

Da $j < n_k$ gilt $a_k^{\varepsilon_k j} \in W$, also

$$\| (a_k^{\varepsilon_k j} - e) \varepsilon_k \Theta \|_\infty \leq \varepsilon/2 .$$

Sei $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ eine Umgebung von ω so, dass für alle $k \in \mathbb{N} \cap \mathcal{U}$ gilt

$$\| m_k (a_k^{\varepsilon_k n_k} - e) \psi_k - \varepsilon_k \Theta \|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

$$= \| a_k^{\varepsilon_k j} (m_k (a_k^{\varepsilon_k n_k} - e) \psi_k - \varepsilon_k \Theta) \|_\infty$$

Es folgt dann

$$\| m_k (a_k^{\varepsilon_k n_k} - e) \psi_k - \varepsilon_k n_k \Theta \|_\infty \leq n_k \cdot \varepsilon$$

Teile durch m_k. Es gilt $\omega\text{-}\lim_k \frac{n_k \varepsilon_k}{m_k} = t$

$\leadsto \omega\text{-}\lim_k \frac{n_k}{m_k} = |t|$

$$\Rightarrow \| c(t) \psi - \psi - t \Theta \|_\infty \leq |t| \varepsilon \qquad \square$$

Um Satz §4.18 anzuwenden, brauchen wir solche Funktionen ψ_k. Die erhalten wir aus der Gleason-Yamabe Konstruktion

19. Die Gleason-Yamabe Konstruktion. Sei G lokal-kompakte Gruppe und sei $U \subseteq G$ eine kompakte Einsumgebung, die keine nicht trivialen Untergruppen enthält. Sei $\alpha : G \to [0,1]$ stetig mit $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq U$ und eindeutigem Maximum in e mit $\alpha(e) = 1$ (solch ein α kann man leicht mit einer Metrik auf G konstruieren).

- Sei $(S_k)_{k \geq 0}$ eine Folge symmetrischer Teilmengen von U mit $\Gamma_k = \langle S_k \rangle \not\subseteq U$. Sei l_k die <u>Wortlänge</u> von (Γ_k, S_k). Für $g \in G - \Gamma_k$ setze $l_k(g) = \infty$. Wir definieren

$$m_k = \min \{ l_k(g) \mid g \in G - U \} - 1$$

$$= \max \{ n \geq 1 \mid \text{alle } g \in G \text{ mit } l_k(g) \leq n \text{ sind in } U \} \geq 1$$

$$\hat{l}_k(x) = \max \{ \tfrac{1}{m_k} l_k(x), 1 \}$$

$$\varphi_k(x) = \sup \{ \alpha(h^{-1}x)(1 - \hat{l}_k(h)) \mid h \in G \}$$

$$\psi_k(x) = \langle \varphi_k \mid x \varphi_k \rangle = \int_G \varphi_k(g) \varphi_k(x^{-1}g)\, dg$$

$\Rightarrow 1 \leq m_k < \infty$

Lemma A $\hat{l}_k$ ist eine Längenfunktion, $\hat{l}_k(g)=0$ genau dann, wenn $g=e$, $\hat{l}_k(g)=1$ falls $g\in G-U$ und für $s\in S_k$ gilt $|\hat{l}_k(sg)-\hat{l}_k(g)|\le \frac{1}{m_k}$.

Beweis: Klar. □

Lemma B Ist $g\notin U^2$, so ist $\varphi_k(g)=0$. Die Funktion φ_k hat ein striktes Maximum mit $\varphi_k(e)=1$. Für $s\in S_k$ gilt $|\varphi_k(sg)-\varphi_k(g)|\le \frac{1}{m_k}$

Beweis Klar: $0\le\varphi_k\le 1$ und $\varphi_k(g)\neq 0 \Rightarrow g\in U^2$

$\varphi_k(e)\ge \alpha(e)(1-\hat{l}_k(e))=1 \Rightarrow \varphi_k(e)=1$

Sei $g\neq e$. Für $h\neq e$ ist $(1-\hat{l}_k(h))\le 1-\frac{1}{m_k}$

Für $h=e$ ist $\alpha(h^{-1}g)<1$, also $\varphi_k(g)<1$.

Für $s\in S_k$, $h\in G$ gilt

$$\alpha(h^{-1}sg)(1-\hat{l}_k(h))=\alpha(\tilde{h}^{-1}g)(1-\hat{l}_k(\tilde{h}))$$

$$\tilde{h}=s^{-1}h$$ □

Wir wählen zu $\varepsilon>0$ eine kompakte symm. Einsumgebung V_ε so, dass für alle $x,y\in G$ mit $x^{-1}y\in V_\varepsilon$ gilt

$$|\alpha(x)-\alpha(y)|\le\varepsilon \quad \text{vgl. §2.12.}$$

<u>Lemma C</u> Für alle $x, y \in G$ mit $x^{-1}y \in V_\varepsilon$ und alle $k \geq 0$ gilt $|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leq \varepsilon$. Insbesondere sind alle φ_k stetig, $(\varphi_k)_{k\geq 0}$ ist beschränkt, gleichgradig stetig und $\operatorname{supp}(\varphi_k) \subseteq \mathcal{U}^2$. #

<u>Beweis</u> Es gilt $|\alpha(h^{-1}x) - \alpha(h^{-1}y)| \leq \varepsilon$, also

$$\left| \alpha(h^{-1}x)(1-\hat{\ell}_k(h)) - \alpha(h^{-1}y)(1-\hat{\ell}_k(h)) \right| \leq \varepsilon$$

also $|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \leq \varepsilon$. □

Wir definieren $\varphi(x) = \omega\text{-}\lim_k \varphi_k(x)$. Nach §4.17, angewandt auf $(\varphi_k|_{\mathcal{U}^2})_{k\geq 0}$ gilt $\varphi \in C_c(G)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathcal{U}^2$ und $\omega\text{-}\lim_k \|\varphi_k - \varphi\|_\infty = 0$.

<u>Lemma D</u> φ hat ein eindeutiges Maximum in $g = e$ und $\varphi(e) = 1$.

<u>Beweis</u> Es gilt $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi(e) = \omega\text{-}\lim_k \varphi_k(e) = 1$. Angenommen, $\varphi(g) = 1$. Wähle $h_k \in \mathcal{U}$ so, dass

$$\varphi_k(g) \geq \alpha(h_k^{-1}g)(1-\hat{\ell}_k(h_k)) \geq \varphi_k(g) - 2^{-k}$$

gilt und setze $h = \omega\text{-}\lim_k h_k \in \mathcal{U}$. Es folgt

$$1 = \alpha(h^{-1}g)(1 - \underbrace{\omega\text{-}\lim_k \hat{\ell}_k(h_k)}_{=0})$$

$$\Rightarrow h = g \in \mathcal{U}$$

Ist $g' \in G$ mit $\varphi(g') = 1$, so gibt es entsprechende Elemente $h_k' \in U$ mit $\omega\text{-}\lim_k h_k' = g'$. Es gilt

$$\hat{l}_k(h_k h_k') \le \hat{l}_k(h_k) + \hat{l}_k(h_k') \Rightarrow \omega\text{-}\lim_k \hat{l}_k(h_k h_k') = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \omega\text{-}\lim_k \left(\alpha((h_k h_k')^{-1} g)(1 - \hat{l}_k(h_k h_k')) \right)$$

$\Rightarrow \varphi(gg') = 1$. Da U symmetrisch ist, ist $\langle g \rangle \subseteq U$

$\Rightarrow \langle g \rangle = \{e\} \Rightarrow g = e$. □

Erinnerung: $\psi_k(x) = \langle \varphi_k | x \varphi_k \rangle$

Wir setzen $\psi(x) = \langle \varphi | x \varphi \rangle$.

Lemma E $\omega\text{-}\lim_k \| \psi_k - \psi \| = 0$, $\mathrm{supp}(\psi_k) \subseteq U^4$ und ψ hat eindeutiges Maximum in $g = e$.

Beweis $\psi_k(x) = \int_G \varphi(g) \varphi(x^{-1} g)\, dg \Rightarrow \psi_k(x) = 0$ wenn $x \notin U^4$.

genauso für ψ.

Wir wählen $\eta : G \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger mit $\eta(U^4) = \{1\}$. Sei $Q = \int_G \eta(g)\, dg > 0$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $\Omega \subseteq \beta\mathbb{N}$ von ω so, dass für alle $k \in \Omega \cap \mathbb{N}$ gilt

$$\| \psi - \psi_k \|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2Q}$$

Für solches k und $x, y \in G$ folgt

$|\varphi(g)\varphi(x^{-1}g) - \varphi_k(g)\varphi_k(x^{-1}g)| \leq$

$|\varphi(g)\varphi(x^{-1}g) - \varphi(g)\varphi_k(x^{-1}g)| + |\varphi(g)\varphi_k(x^{-1}g) - \varphi_k(g)\varphi_k(x^{-1}g)|$

$\leq \frac{\varepsilon}{Q}\eta(g)$. Integration über g liefert

$|\langle\varphi|x\varphi\rangle - \langle\varphi_k|x\varphi_k\rangle| \leq \varepsilon$.

Es gilt $\psi(e) = \langle\varphi|\varphi\rangle = \|\varphi\|^2$ (L^2-Norm!)

und für $x \in G$

$\psi(g) = \langle\varphi|x\varphi\rangle \overset{CSU}{\leq} \|\varphi\| \cdot \|x\varphi\| = \|\varphi\| \cdot \|\varphi\| = \psi(e)$

Gleichheit gilt bei der CSU genau dann, wenn $\varphi, x\varphi$ lin. abhängig sind, d.h. $x\varphi = \lambda\varphi$. Aber φ hat eindeutiges Maximum in e, also $x = e$ bei Gleichheit. $\square$

<u>Satz</u>. Sei $L > 0$, sei $(q_k)_{k\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 \leq q_k \leq L\, m_k$, sei $a_k \in S_k$ und sei $\Theta_k = q_k(a_k - e)\psi_k$.

Dann gilt $\operatorname{supp}(\Theta_k) \subseteq U^5$. Die Folge $(\Theta_k)_{k\geq 0}$ ist beschränkt und gleichgradig stetig.

<u>Beweis</u> Wir wählen $\eta: G \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger, $\eta(U^7) = \{1\}$. Sei $Q = \int_G \eta(g)\,dg > 0$

Klar: $\mathrm{supp}(\Theta_k) \subseteq U^5$. Weiter gilt

$$|\varphi_k(g)(\varphi_k(a_k^{-1}x^{-1}g) - \varphi_k(x^{-1}g))| \leq \frac{1}{m_k}\eta(g)$$, also

$$|\Theta_k(x)| \leq \frac{q_k}{m_k} Q \leq LQ .$$

Beh Zu jedem $\delta > 0$ gibt es eine kompakte symmetrische Einsumgebung W_ε so, dass $|\varphi_k(zx) - \varphi_k(x)| \leq \delta$ für alle $k \geq 0$, $z \in W_\varepsilon$, $x \in G$ gilt.

Denn wenn das falsch ist gibt es $K \subseteq \mathbb{N}$ unendlich, $z_k \in U$, $x_k \in G$ für $k \in K$, $\lim_{k \in K} z_k = e$ und $|\varphi_k(z_k x_k) - \varphi_k(x_k)| > \delta$. Es gilt $x_k \in U^3$. Wähle ω' in $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ im Abschluss von K, setze $z_k = e$ für $k \notin K$ $= x_k$

Es folgt mit $z = \omega'\text{-}\lim_k z_k = e$, $x = \omega'\text{-}\lim_k x_k \in U^3$ und der Stetigkeit von $\varphi'(y) = \omega'\text{-}\lim_k \varphi(y)$, dass $|\varphi'(zx) - \varphi'(x)| \geq \delta$ ↯ $\square$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, setze $W = W_{\varepsilon/LQ}$. Wir zeigen, dass

$$|\Theta_k(xz) - \Theta_k(x)| \leq \varepsilon \quad \text{für } x \in G,\ z \in W.$$

$$\Theta_k(xz) - \Theta_k(x) = q_k \langle (a_k - e)\varphi_k \mid x(z-e)\varphi_k \rangle$$

$$|((a_k - e)\varphi_k)(y)(x(z-e))\varphi_k(y)| \leq \eta(y)\frac{1}{m_k}\frac{\varepsilon}{LQ}$$ $\square$

nun über y integrieren.

20. Wir spezialisieren jetzt auf folgende Situation.

Sei $P_k = \{ g \in U \mid g, g^2, \dots, g^k \in U \}$

Klar: $P_{k+1} \subseteq P_k$, $\bigcap_k P_k = \{e\}$, denn:

$\bigcap_k P_k = \{ g \in U \mid \langle g \rangle \subseteq U \}$

<u>Lemma A</u> $(P_k)_{k \geq 0}$ ist eine Umgebungsbasis von e.

<u>Beweis</u> Sei $V \subseteq G$ offene Einsumgebung. Zz: es gibt k mit $P_k \subseteq V$, und alle P_k sind Einsumgebungen.

Sei $p_k(g) = g^k \Rightarrow P_k = p_0^{-1}(U) \cap p_1^{-1}(U) \cap \dots \cap p_k^{-1}(U) \cap U$

$\Rightarrow$ kompakt symmetrisch Einsumgebung.

Sei $L_k = P_k - V_k \Rightarrow L_{k+1} \subseteq L_k$. Falls alle $L_k \neq \emptyset$, so $\bigcap_k L_k \neq \emptyset$ (Kompaktheit der L_k) $\Rightarrow \bigcap_k L_k = e \notin V$ ↯

□

<u>Lemma B</u> Setzt man $S_k = P_k$ und ist G nicht diskret, so gilt $\lim_k m_k = \infty$ (m_k definiert wie in §4.19).

<u>Beweis</u> G nicht diskret $\Rightarrow P_k \neq \{e\} \Rightarrow \langle P_k \rangle \not\subseteq U$, die Gleason-Yamabe Konstruktion ist anwendbar.

Zu $n \geq 1$ gibt es Einsumgebung W mit $W^n \subseteq U$.

Wähle N so, dass $P_k \subseteq W$ für alle $k \geq N$.

Es folgt $P_k^n \subseteq U \Rightarrow m_k \geq n$ für alle $k \geq N$ □

$\Rightarrow H$

21. Theorem Sei G eine lokalkompakte nicht diskrete Gruppe ohne kleine Untergruppen, sei $U \subseteq G$ eine kompakte symmetrische Einsumgebung, die keine nicht triviale Untergruppe enthält.

Sei $P_k = \{g \in U \mid g^0, g^1, \dots, g^k \in U\}$ und sei

$m_k = \max\{m \geq 1 \mid P_k^m \subseteq U\}$ (entspricht §4.19).

Dann existiert $L > 0$ so, dass für alle k gilt

$$L \cdot m_k \geq k$$

Beweis Wir kennen die Gleason-Yamabe-Konstruktion §4.19 für $S_k = P_k$. Sei $\Gamma_k = \langle P_k \rangle \not\subseteq U$, wähle $g_k \in \Gamma_k - U$ mit $\ell_k(g) = m_k + 1$. Schreibe $g_k = h_0 \cdots h_{m_k}$, $h_i \in P_k$.

Wähle $j \in \{0, \dots, m_k\}$ so, dass $\|(h_j - e)\psi_k\|_\infty \geq \|(h_i - e)\psi_k\|_\infty$ für alle $i = 0, \dots, m_k$ gilt. Wegen $\|(ab-e)f\|_\infty = \|(ab-a+a-e)f\|_\infty$ $\leq \|(ab-a)f\|_\infty + \|(a-e)f\|_\infty = \|(b-e)f\|_\infty + \|(a-e)f\|_\infty$ folgt

$$\|(g_k - e)\psi_k\|_\infty \leq \sum_{i=0}^{m_k} \|(h_i - e)\psi_k\|_\infty \leq (1 + m_k)\|(h_j - e)\psi_k\|_\infty .$$

Wir setzen $a_k = h_j$ und betrachten die Folgen $(a_k, m_k)_{k \geq 0}$ und $(a_k, k)_{k \geq 0}$. Wegen $a_k \in P_k$ folgt $\lim_k a_k = e$ §4.20 (Lemma A) und $\lim_k m_k = \infty$ (Lemma B).

Wegen $a_k \in P_k$ ist $(a_k, k)_{k \geq 0}$ kontrolliert in U und $(a_k, m_k)_{k \geq 0}$ ebenfalls.

Sei $V \subseteq U$ eine symmetrische Einsumgebung. Nach §4.11 existiert $r = r_V > 0$ so, dass $a_k^{\lfloor tk \rfloor}, a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} \in V$ für alle $k \geq 0$ und alle $t \in [0, r_V]$ gilt.

Angenommen, das Theorem ist falsch. Dann gibt es $K \subseteq \mathbb{N}$ unendlich mit $\lim_{k \in K} k/m_k = \infty$. Wähle $\omega' \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ im Abschluss von K. Für jedes $t \geq 0$ $[0, r_V]$ gibt es eine Umgebung $\Omega \in \beta\mathbb{N}$ von ω' so, dass für alle $k \in K$ gilt: $t \cdot m_k < r_V \cdot k$. Also gilt $a_k^{\lfloor t m_k \rfloor} \in V$. Für die Einparametergruppe $c(t) = \omega'\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor t m_k \rfloor}$ folgt $c(t) \in V$ für alle $t \geq 0$

$\Rightarrow c = \text{const}$, $D_c \psi = 0 = \Theta$.

Nun $\Theta_k = m_k (a_k - e)\psi_k$, $\Theta(x) = \omega'\text{-}\lim_k \Theta_k(x)$ wie in §4.19, §4.18. $\Rightarrow \omega'\text{-}\lim_k \| m_k (a_k - e)\psi_k \|_\infty = 0$

$\Rightarrow \omega'\text{-}\lim_k (m_k + 1) \| (a_k - e)\psi_k \|_\infty = 0$

$\Rightarrow \omega'\text{-}\lim_k \| (g_k - e)\psi_k \|_\infty = 0$ $\qquad g = \omega'\text{-}\lim_k g_k$

$\Rightarrow \| (g - e)\psi \|_\infty = 0$. Da ψ ein deutliches Maximum in e hat und $g\psi = \psi$, folgt $g = e$ ↯

$g_k \notin U$

$\square$

Erinnerung: für eine Einparametergruppe $c \in \mathcal{L}(G)$ und $r \in \mathbb{R}$ ist $r \cdot c = [t \mapsto c(rt)] \in \mathcal{L}(G)$.

Aus der Stetigkeit von c folgt: es gibt $r > 0$ so, dass $s \cdot c \in \mathcal{L}(G, U)$ für alle $s \leq r$ gilt.

Weiter gilt nach der Kettenregel

$$D_{r \cdot c} f = r D_c f \qquad \text{falls } f \text{ diff'bar ist.}$$

<u>Korollar</u> Ist G eine lokal kompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen, so existiert eine diff'bare Funktion $\varphi \in C_c(G)$, die in e ein eindeutiges Maximum hat.

<u>Beweis</u> Wir können annehmen, dass G nicht diskret ist (sonst ist die Beh. trivialerweise wahr). Sei φ die aus der Gleason-Yamabe-Konstruktion resultierende Funktion, für $S_n = P_n$. Nach der vorigen Bemerkung genügt es zu zeigen: für jedes $c \in \mathcal{L}(G, U)$ ist $t \mapsto \Pi_{c(t)} \varphi$ diff'bar in $t = 0$.

Setze $a_k = c(2^{-k})$, dann $a_k \in P_{2^k}$ und $(a_k, 2^k)_{k \geq 0} \in CS(G, U)$ mit $F_\omega((a_k, 2^k)_{k \geq 0}) = c$, d.h.

$$\omega\text{-}\lim_k a_k^{\lfloor t 2^k \rfloor} = c(t)$$

Nach dem Theorem gibt es $L > 0$ so, dass $k \le L \cdot m_k$ für alle k, also $2^k \le L \cdot m_{2^k}$. Nach §4.19 ist die Folge $\Theta_k = 2^k (a_k - e) \varphi_k$ beschränkt und gleichgradig stetig, $\operatorname{supp}(\Theta_k) \subseteq U^5$.

Nach §4.18 folgt $D_c \varphi = \Theta$, mit $\Theta(x) = \omega\text{-}\lim_k \Theta_k(x)$

$\square$

Wir definieren $C_c^1(G) = \{\varphi \in C_c(G) \mid \varphi \text{ ist diff'bar}\}$.

Offensichtlich ist $C_c^1(G) \subseteq C_c(G)$ ein Untervektorraum.

22. <u>Lemma A</u> Sei G eine lokalkompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen. Für $c, c' \in \mathcal{L}(G)$ definieren wir $a_k = c(2^{-k})$, $a_k' = c'(2^{-k})$, $b_k = a_k a_k'$. Dann existiert für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$c''(t) = \omega\text{-}\lim_k b_k^{[t 2^k]}$$

und $c'' \in \mathcal{L}(G)$.

<u>Bew:</u> Sei $U \subseteq G$ kompakte symmetrische Einsumgebung, die keine nichttrivialen Untergruppen enthält. Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so, dass $c([0,2^{-N}]), c'([0,2^{-N}]) \subseteq U$ gilt. Für $k \geq 0$ folgt

$$a_{k+N}, a'_{k+N} \in P_{2^k}$$

sowie $\lim_k b_k = e$. Nach §4.21 gibt es $M \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq 0$ gilt

$$M \cdot m_k \geq k \cdot 2^{N+1}$$

(wobei $m_k = \max\{ l \mid P_k^l \subseteq U\}$ wie in §4.19)

Es folgt $M \cdot m_{2^k} \geq 2^{1+k+N}$ sowie

$$l_{2^k}\left(b_{k+N}^{2^{k+N}}\right) \leq 2 \cdot 2^{k+N} \leq M \cdot m_{2^k} .$$

Damit ist $b_{k+N}^n \in U^M$ für $0 \leq n \leq 2^{k+N}$.

Die Folge $(b_k, 2^k)$ ist also kontrolliert in $W = U^M$ (für $k \geq N$, das genügt) und nach §4.15 existiert $c''(t) = \omega\text{-}\lim_k b_k^{\lfloor t \cdot 2^k \rfloor}$, und $c'' : \mathbb{R} \to G$ ist ein Homomorphismus.

Für $0 \leq t \leq 2^{-n} \frac{1}{L}$ gilt

$$l_{2^t}\left(b_{k+N}^{\lfloor t 2^{k+N} \rfloor}\right) \leq 2 \lfloor t \cdot 2^{k+N} \rfloor \leq t \cdot 2^{1+k+N} \leq 2^{-n} \cdot m_k$$

Es folgt $c''(t) \in P_{2^{-n}}$ für $|t| \leq 2^{-n} \frac{1}{L}$.

Da die P_δ eine Umgebungsbasis der Eins bilden (§4.20) ist c'' stetig in $t=0$, also stetig und §1.5. $\square$

Wir definieren

$$c'' = c + c'.$$

#

<u>Lemma B</u> Sei G lokal kompakt Gruppe ohne kleine Untergruppen, sei $c, c' \in \mathcal{L}(G)$ und $c'' = c + c'$. Für jedes $\varphi \in C_c^1(G)$ gilt

$$D_{c''} \varphi = D_c \varphi + D_{c'} \varphi.$$

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq G$ kompakte symm. Einsumgebung, die keine nichttriviale Untergruppen enthält. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$c([0, 2^{-N}]), c'([0, 2^{-N}]) \subseteq U$$ gilt.

Es gilt mit $a_k = C(2^{-k})$, $a_k' = C'(2^{-k})$, $b_k = a_k a_k'$

$$\lim_k \| 2^k (a_k - e)\psi - D_C \psi \|_\infty = 0$$

$$\lim_k \| 2^k (a_k' - e)\psi - D_{C'} \psi \|_\infty = 0$$

Sei $\Theta = D_C \psi + D_{C'}\psi$. Es folgt

$$0 = \lim_k \| 2^k (a_k - e)\psi + 2^k (a_k' - e)\psi - \Theta \|_\infty$$

$$= \lim_k \| 2^k (a_k - e)\psi + 2^k a_k (a_k' - e)\psi - \Theta \|_\infty \quad (\lim_k a_k = e)$$

$$= \lim_k \| 2^k (b_k - e)\psi - \Theta \|_\infty .$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $k > m$, $n = 2^{k-m}$. Es gilt

$$2^m (b_k^n - e)\psi - \Theta = \sum_{j=0}^{n-1} b_k^j \left(2^m (b_k - e)\psi - \tfrac{1}{n}\Theta\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} (b_k^j - e)\Theta$$

Sowie

$$\Big\| \sum_{j=0}^{n-1} b_k^j 2^m (b_k - e)\psi - \tfrac{1}{n}\Theta) \Big\|_\infty$$

$$\leq n \| 2^m (b_k - e)\psi - \tfrac{1}{n}\Theta \|_\infty$$

$$= \| 2^k (b_k - e)\psi - \Theta \|_\infty \xrightarrow{k} 0$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $q \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $a \in P_q$ gilt $\| (a - e)\Theta \|_\infty \leq \varepsilon/2$.

Es gilt

$$l_{2^k}\left(b_{k+N}^{2^{k+N-m}}\right) \le 2^{1+k+N-m} \le 2^{N-m+1} L\, m_k .$$

Ist $2^m \ge q \cdot L \cdot 2^{N+1}$ und $k > m$, so folgt

$$b_{k+N}^{0}, \dots, b_{k+N}^{k+N-m} \in P_q ,$$

damit

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (b_k^j - e)\Theta \right\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } k \gg 0$$

$$\Rightarrow \lim_m w\text{-}\lim_k \left\| 2^m (b_k^n - e)\psi - \Theta \right\|_\infty$$

$$= \lim_m \Big\| \underbrace{2^m (c''(2^{-m}) - e)\psi}_{D_{c''}\psi} - \Theta \Big\|_\infty = 0 \qquad \square$$

Für $g \in G$ definieren wir die <u>adjungierte Darstellung</u>

$$\begin{aligned} Ad_g : \mathcal{L}(G) &\to \mathcal{L}(G) \\ c &\mapsto [t \mapsto g\, c(t)\, g^{-1}] = r_g \circ c \end{aligned}$$

Klar: $Ad(g)(c + c') = Ad(g)c + Ad(g)c'$

Lemma C' (Gleiche Voraussetzung wie in Lemma B)

Falls $\varphi \in C_c^1(G)$ ein eindeutiges Maximum in $g=e$ hat, ist die Abbildung

$$\mathcal{L}(G) \to C_c(G), \quad c \mapsto D_c\varphi$$

injektiv.

Beweis

(a) Wenn c nicht konstant ist, so ist $D_c\varphi \neq 0$.

Denn: $\left.\frac{d}{dt} c(t)\varphi\right|_{t=s} = c(s) D_c\varphi$, weil

$(c(s+t)-c(s))\varphi = c(s)(c(t)-e)\varphi$.

Ist also $D_c\varphi = 0$, so ist $\left.\frac{d}{dt} c(t)\varphi\right|_s = 0$ für alle s.

Damit $c(t)\varphi = \text{const} \Rightarrow c(t) = \text{const}$, weil φ eindeutiges Maximum in e hat. $\square$

Wir bezeichnen die konstante Einparametergruppe mit 0. Es gilt $c + (-1)\cdot c = 0$ nach der Definition von "$+$".

Angenommen, $D_c\varphi = D_{c'}\varphi \Rightarrow D_c\varphi + D_{-1\cdot c'}\varphi = 0$

$$\Rightarrow D_{c+(-1)\cdot c'}\varphi = 0$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$D_{c+c'}\varphi = 0 \quad \text{falls } c = (-1)\cdot c'$$

Sei $F(s,t) = c'(s)c(t)\varphi = c(t)\underbrace{c(-t)c'(s)c(t)}_{\tilde c(s)}\varphi$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = c(t)\tilde c(s)\, D_{\tilde c}\varphi$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ D_c\varphi + D_{\tilde c}\varphi = 0}}{=} - c(t)\check c(s)\, D_c\varphi = - c'(s)c(t)\, D_c\varphi$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$$

Damit ist F total differenzierbar und

$t \mapsto F(t, t-r) = \text{const}$, insbesondere $F(r,0) = F(0,-r)$,

d.h. $c(r)\varphi = c'(-r)\varphi \Rightarrow c = (-1)\cdot c'$, da

φ eindeutiges Maximum in $g = e$ hat. $\square$

Folglich ist $(\mathcal{L}(G),+)$ ein reeller Vektorraum mit Skalarverknüpfung $r\cdot c$ und für jedes $\varphi \in C_c^1(G)$ ist $c \mapsto D_c\varphi$ eine lineare Abbildung.

Ausserdem ist "+" unabhängig von der Wahl von $\omega \in D'N$.

Wir versehen $\mathcal{L}(G) \subseteq C(\mathbb{R}, G)$ mit der kompakt-offenen Topologie. Eine Subbasis der c-o-Topologie sind die Mengen

$\langle \mathcal{G}, W\rangle = \{ c \in \mathcal{L}(G) \mid c(\mathcal{G}) \subseteq W \}$ $\quad$ $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $W \subseteq G$ offen.

Bezüglich der c-o-Topologie ist die Auswertungsabbildung

$(t, c) \mapsto c(t)$, $\mathbb{R} \times \mathcal{L}(G) \to G$ stetig, da $\mathbb{R}$ lokal kp. ist.

Insbesondere ist die Abbildung

$$\exp : \mathcal{L}(G) \to G \,, \quad c \mapsto c(1)$$

stetig.

<u>Lemma D</u> Sei $U \subseteq G$ kompakt, symmetrisch, ohne nicht trivial Untergruppen in U. Dann ist

$$\mathcal{L}(G, U) \subseteq \mathcal{L}(G) \quad \text{kompakt.}$$

<u>Bew</u> Mit Arzela-Ascoli..

(a) Sei $A_t = \{ c \in \mathcal{L}(G) \mid c(t) \in U \}$ $\leadsto$ A_t abg.

$\Rightarrow \mathcal{L}(G, U) = \bigcap_{t \in [0,1]} A_t$ auch abg. in $\mathcal{L}(G)$

(b) Sei $t \in \mathbb{R}$, $t_0 = \lfloor t \rfloor$. Für $c \in \mathcal{L}(G,U)$ gilt $c(t) = c(1)^{t_0} c(t_1)$ $\quad 0 \le t_1 = t - t_0 < 1$

$\Rightarrow c(t) \in U^{|t_0|+1}$

$\Rightarrow \overline{\{ c(t) \mid c \in \mathcal{L}(G,U) \}}$ ist kompakt.

(c) Ist $|s| \leq 2^{-n}$ und $c \in \mathcal{L}(G,U)$, so ist $c(s) \in P_{2^n}$. Für alle $c \in \mathcal{L}(G,U)$ und alle $|s| \leq 2^{-n}$ ist also

$c(t+s) \in c(t) P_{2^n}$, d.h. $\mathcal{L}(G,U)$ ist gleichgradig stetig. Nach Arzela-Ascoli ist $\overline{\mathcal{L}(G,U)} = \mathcal{L}(G,U)$ kompakt. $\square$

<u>Lemma E</u> $\mathcal{L}(G)$ ist lokalkompakt und die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G)$, $(r,c) \mapsto r \cdot c$ ist stetig.

<u>Bew.</u> Sei $r \in \mathbb{R}$, $c \in \mathcal{L}(G)$, $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, $W \subseteq G$ offen, mit $c(K) \subseteq W$. Die Abbildung

$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{L}(G) \to G$, $(s,t,x) \longmapsto x(st)$ ist stetig. Nach Wallace' Lemma gibt es V_1, V_2, V_3 offen, $(r,c) \in V_1 \times V_3$ mit $K \subseteq V_2$

$f(V_1 \times V_2 \times V_3) \subseteq W$ was $s \circ x \in \langle G, W \rangle$ für alle $s \in V_1$, $x \in V_3$. Also ist

$\mathbb{R} \times \mathcal{L}(G) \to \mathcal{L}(G)$ $(r,c) \longmapsto r \cdot c$ stetig. #

Ist nun $W \subseteq U \subseteq G$ offen und symmetrisch, $c \in \mathcal{L}(G)$, so gibt es $r > 0$ mit $r \cdot c([0,1])$ $= c([0,r]) \subseteq W$ was $\mathcal{L}(G,U)$ kompakt Umgebung von $r\cdot c$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{r}\cdot \mathcal{L}(G,U)$ ist kompakte Umgebung

von c. $\square$

<u>Lemma F</u> Angenommen, die Abbildung $g \mapsto g^2$ ist injektiv auf U, $U \subseteq G$ kompakte symmetrische Einsumgebung, U enthält keine nichttrivialen Untergruppen, und φ ist definiert wie in der Gleason-Yamabe Konstruktion §4.19. Dann ist die Abbildung

$$F: \mathcal{L}(G,U) \to \mathcal{C}_c(G), \quad c \mapsto D_c\varphi \quad \text{stetig.}$$

<u>Beweis</u> <u>(a) exp ist injektiv auf $\mathcal{L}(G,U)$.</u>

<u>Beweis</u> Ist $c(1)=c'(1)$ für $c,c' \in \mathcal{L}(G,U)$, so folgt $c(\frac{1}{2})=c'(\frac{1}{2}) \Rightarrow c(q)=c'(q)$ für alle $q \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]\cap[0,1]$ $\Rightarrow c=c'$ $\square$

<u>(b) $\mathcal{L}(G,U)$ ist metrisierbar.</u>

<u>Beweis</u> $\mathcal{L}(G,U)$ ist kompakt, also $\mathcal{L}(G,U)$ homöomorph zur kompakten Menge $K=\underbrace{\{c(1) \mid c\in\mathcal{L}(G,U)\}}_{\exp(\mathcal{L}(G,U))} \subseteq G$. $\square$

<u>(c) F ist stetig</u>

Angenommen, $(c_n)_{n\geq 0}$ ist Folge in $\mathcal{L}(G,U)$ mit Grenzwert c. Wir wählen mit §4.19, 4.18 eine Folge $(q_k)_{k\geq 0}$ mit $q_k \geq k$, $q_0 \geq 1$

$$\| D_{c_k}\varphi - q_k(c_k(1/q_k)-e)\varphi_k\|_\infty \leq 2^{-k}$$

Es gilt $c_k(1/q_k) \in P_k$, die Folge $\left(c_k(\frac{1}{q_k}), q_k\right)_{k\geq 0}$ ist kontrolliert in U und für $\check{c} = F_\omega\left(c_k(\frac{1}{q_k}), q_k\right)$ gilt $\check{c}(1) = \omega\text{-}\lim_k c_k(1) = c$. Nach (a) folgt $\check{c} = c$. Nach §4.19 und §4.18 folgt $D_{\check{c}}\psi = \Theta$, $\Theta_k = q_k(c_k(1/q_k) - e)\psi_k$, $\Theta(g) = \omega\text{-}\lim_k \Theta_k(x)$, also $\lim_k \|D_{c_k}\psi - D_c\psi\|_\infty = 0$. ☐

23. <u>Theorem</u> Ist G eine lokalkompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen, so ist $\mathcal{L}(G)$ ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum.

<u>Beweis</u> Wir wählen eine kompakte symmetrische Einsumgebung $U \subseteq G$, die keine nichttriviale Untergruppe enthält und auf der die Abbildung $g \mapsto g^2$ injektiv ist, vgl. §4.10. Wir können annehmen, dass G nicht diskret ist.

Wir wählen $L \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{k+1} \leq L m_{2^k}$ für alle $k \geq 0$ gilt, $m_k = \max\{m \mid P_k^m \subseteq U\}$, vgl. §4.21.

Für $c, c' \in \mathcal{L}(G, U)$ gilt mit $b_k = c(2^{-k})c'(2^{-k})$, dass für $t \in [0,1]$

$$l_{2^k}\left(b_k^{\lfloor t 2^q \rfloor}\right) \le 2^{1+k}\, t \le 2^{1+k} \le L\, m_{2^k}$$

$\Rightarrow \frac{1}{L}(c+c') \in \mathcal{L}(G,U)$ für alle $c, c' \in \mathcal{L}(G,U)$.

Betrachte die stetige Abbildung $F : \mathcal{L}(G,U) \to C_c(G)$,

$c \mapsto D_c\psi$ aus Lemma F, setze $K = F(\mathcal{L}(G,U))$.

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{L}\mathcal{L}(G,U) \times \frac{1}{L}\mathcal{L}(G,U) \arrow[r, "+"] \arrow[d, "F\times F", "\text{stetig}+\text{bij}"'] & \mathcal{L}(G,U) \arrow[d, "F"', "\text{stetig}+\text{inj}+\text{bij.}"] \\
\frac{1}{L}K \times \frac{1}{L}K \arrow[r, "+", "\text{stetig}"'] & K
\end{tikzcd}$$

Also ist + oben stetig. Für alle $c, c' \in \mathcal{L}(G,U)$ gibt es $s > 0$ so, dass $s \cdot \mathcal{L}(G,U)$ kompakte Umgebung von c, c' ist, vgl. Lemma E. Damit ist + auch stetig bei c, c'.

Da $\mathcal{L}(G)$ ein topologischer Vektorraum und lokalkompakt ist, ist $\dim \mathcal{L}(G) < \infty$ (ÜA).

$\square$

24. Theorem Ist G lokalkompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen und ist $W \subseteq \mathcal{L}(G)$ eine kompakte 0-Umgebung, so ist $\exp(W) \subseteq G$ eine Einsumgebung.

Der Beweis ist wörtlich so lang wie §4.22. □

Korollar In jeder lokalkompakten Gruppe G ohne kleine Untergruppen gibt es eine Nullumgebung $W \subseteq \mathcal{L}(G)$ so, dass $\exp|_W$ ein Homöomorphismus ist. Insbesondere ist G lokal zusammenhängend und lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, $n = \dim(\mathcal{L}(G))$. □

Damit ist $G^0 \subseteq G$ offen. Betrachte die Wirkung

$\mathrm{Ad}: G^0 \times \mathcal{L}(G^0) \to \mathcal{L}(G^0)$. Der Kern von Ad ist $Z = \mathrm{Cen}(G^0)$ (weil $G^0 = \langle W \rangle$)

Z^0 hat keine kleinen Untergruppen $\Rightarrow Z^0 \cong (\mathbb{R}^k, +)$

$$G^0/Z^0 \xrightarrow[\text{Überlagerung}]{} G^0/Z \hookrightarrow GL(\mathcal{L}(G))$$

$\Rightarrow G^0/Z$ lineare Liegruppe, Z Liegruppe

$\overset{!}{\Rightarrow} G^0$ Liegruppe $\Rightarrow G$ Liegruppe □

25. Theorem Ist G eine lokalkompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen, so ist G eine Liegruppe.