§ 3 Hilbert-Moduln und das Peter-Weyl Theorem

1. **Def** Wir definieren $C_c(X, \mathbb{C}) =$

$\{\varphi : X \to \mathbb{C} \mid \varphi$ stetig und $\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{C}^*)}$ kompakt$\}$

Es folgt $C_c(X, \mathbb{C}) = C_c(X) + i \cdot C_c(X)$ $\quad i = \sqrt{-1}$

$C_c(X, \mathbb{C})$ ist ein komplexer Vektorraum. Sei

$\bar{\varphi}(x) = \overline{\varphi(x)}$ $\qquad |\varphi|(x) = |\varphi(x)|$

Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Eine lineare Abbildung $I : G \to \mathbb{C}$ heißt <u>komplexes Haar-Integral</u>, falls gilt:

(i) $I(\varphi \circ \varrho_{a^{-1}}) = I(\varphi)$ für alle $\varphi \in C_c(G, \mathbb{C})$, $a \in G$

(ii) $I(\bar{\varphi}\varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in C_c(G, \mathbb{C})$

(iii) $I(\bar{\varphi}\varphi) = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$

Ist $\varphi \in C_c(G, \mathbb{C}) \Rightarrow \underset{\text{eindeutig}}{\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2}$ $\quad \varphi_1, \varphi_2 \in C_c(G)$

setze $I(\varphi) = I(\varphi_1) + i I(\varphi_2)$

$\Rightarrow I$ ist komplexes Haar-Integral

Lemma Auf jeder lokal kompakten Gruppe G gibt es ein komplexes Haar-Integral I. Ist J ein weiteres komplexes Haar-Integral, so ist $J = s I$ für ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis Die Existenz haben wir eben gesehen.

Die Einschränkung von J auf $C_c(\mathbb{R}) \subseteq C_c(G, \mathbb{C})$ ist ein Haar-Integral, denn: $\varphi \in C_c^+(\mathbb{R})$ setze $\psi(g) = \sqrt{\varphi(g)}$ $\Rightarrow$ $\varphi = \psi^2 = \bar{\psi} \cdot \psi \Rightarrow J(\varphi) \geq 0$ und $\varphi \neq 0 \Rightarrow J(\varphi) > 0$. Also existiert nach Theorem §2.21 ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $J|_{C_c(G)} = s I_{C_c(G)}$.
Da $C_c(G) + i\, C_c(G) = C_c(G, \mathbb{C})$, folgt $J = s \cdot I$ □

Satz # Für $\varphi, \psi \in C_c(G, \mathbb{C})$ setzen wir

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_G \varphi \bar{\psi}$$

Dann ist $\langle \,|\, \rangle$ eine (positiv definite) hermitesche Form (d.h. $\langle \,|\, \rangle$ ist in beiden Argumenten additiv und $\langle z\varphi | \psi \rangle = z \langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \bar{z} \psi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in C_c(G, \mathbb{C})$ und $z \in \mathbb{C}$,

$\langle \varphi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \varphi \rangle}$ und

$\langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0$, $\langle \varphi | \varphi \rangle = 0$ genau dann, wenn $\varphi = 0$

Das folgt aus der Definition von $\langle \, | \, \rangle$. $\square$

2. <u>Erinnerung</u> Ein <u>Prä-Hilbertraum</u> E ist ein komplexer Vektorraum E mit einer positiv definiten hermiteschen Form $\langle \, | \, \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$. Wir setzen $\|w\| = \sqrt{\langle w | w \rangle}$. Dann gilt

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \| u + i^k v \|^2 \qquad i = \sqrt{-1}$$

sowie die <u>Cauchy-Schwarz Ungleichung</u>,

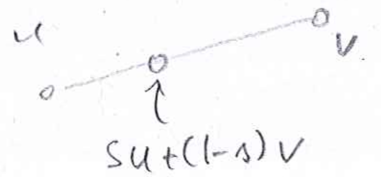
$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, denn:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \| \langle v | u \rangle u - \|u\|^2 v \|^2 \\ &= |\langle v | u \rangle|^2 \|u\|^2 - 2 \, \mathrm{Re} (\underbrace{\langle v | u \rangle \|u\|^2 \langle u | v \rangle}_{\in \mathbb{R}}) + \|u\|^4 \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 (\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - |\langle u | v \rangle|^2) . \end{aligned}$$

Es folgt $\| u + v \|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$, also ist $\| . \|$ eine <u>Norm</u> auf E. Falls E bezüglich der Norm $\| . \|$ vollständig ist, heißt E <u>Hilbert-Raum</u>

Bsp $C_c(G,\mathbb{C})$ ist bezüglich $\langle\ |\ \rangle$ ein Prä-Hilbertraum (und hat unendliche Dimension, falls G unendlich ist, ÜA).

3. **Def** Eine Teilmenge $K\subseteq E$ eines reellen oder komplexen Vektorraums heißt **konvex**, falls für alle $u,v\in K, s\in[0,1]$ gilt $s\cdot u+(1-s)v\in K$.



Sind $K,L\subseteq E$ konvex, so auch $K+L$. Ist E ein normierter Vektorraum, so definieren wir den **konvexen Abschluss** einer Teilmenge $X\subseteq E$ als

$$\overline{\mathrm{conv}}(X)=\bigcap\{K\subseteq E \mid K \text{ abgeschlossen, konvex und } X\subseteq K\}$$

Das ist eine abgeschlossene konvexe Menge, die X enthält.

Angenommen, E ist ein Prä-Hilbertraum. Für $w\in E-\{0\}$ und $s\in\mathbb{R}$ definieren wir den **Halbraum**

$$H=H(w,s)=\{u\in E \mid \mathrm{Re}\langle u|w\rangle\le s\}\subseteq E$$

4. Lemma Sei E ein Prä-Hilbertraum und sei $K \subseteq E$ konvex und vollständig. Sei $u \in E$. Dann gibt es genau ein $v \in E$, $v = p(u)$, das den Abstand zu u minimiert.

Bew. Für alle $v, w \in E$ gilt

$$\|(v-u)-(w-u)\|^2 + \|(v-u)+(w-u)\|^2$$
$$= 2\|v-u\|^2 + 2\|w-u\|^2$$ (Parallelogrammgleichung – ÜA)

Sei $d = \inf\{\|u-v\| \mid v \in K\}$, es folgt

$$\|v-w\|^2 \leq 2\|v-u\|^2 + 2\|w-u\|^2 - 4\underbrace{\|u-\tfrac{1}{2}(v+w)\|^2}_{\geq d^2}$$

Ist also $(v_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in K mit $\lim_n \|v_n-u\| = d$, so ist dies eine Cauchyfolge mit Grenzwert $v \in K$, $\|v-u\| = d$. Aus der Ungleichung oben folgt, dass $p(u) = v$ eindeutig bestimmt ist. $\square$

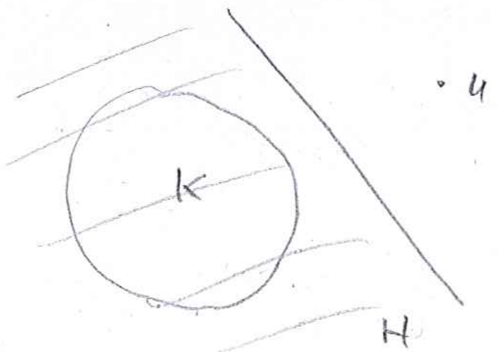
Wir nennen $p: E \to K$ die Projektion von E nach K (vgl. auch CAT(0)-Geometrie!)

5. **Satz** (Banach-Hahn-Mazur)

Sei E ein Hilbertraum und sei $K \subseteq E$ abgeschlossen und konvex. Dann gilt

$$K = \bigcap \{ H \subseteq E \mid H \text{ Halbraum und } K \subseteq H \}.$$

Beweis Die rechte Seite ist abgeschlossen und konvex und enthält die linke Seite. Es genügt zu zeigen: Für jedes $u \in E - K$ gibt es ein Halbraum H mit $K \subseteq H$ und $u \notin H$.



Sei $v = p(u)$

$p: E \to K$ Projektion

$w = u - v \neq 0$ (da $u \notin K$), $s = \mathrm{Re}(\langle v, w \rangle)$

$H = H(w, s)$. Es folgt

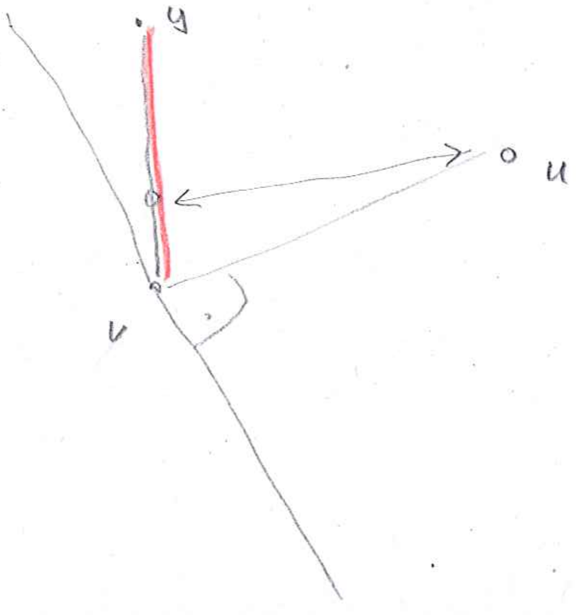
$0 < \langle w | w \rangle = \mathrm{Re} \langle w | w \rangle = \mathrm{Re}(\langle u | w \rangle) - s \Rightarrow u \notin H$.

Für $y \in E - H$ betrachte $t \mapsto \|(1-t)v + ty - u\|^2$

Das ist ein Polynom vom Grad ≤ 2, die Ableitung in $t = 0$ ist

$2 \mathrm{Re} \langle v - y | u - v \rangle = 2 \mathrm{Re} \langle v - y | w \rangle$

$2s - 2\mathrm{Re} \langle y | w \rangle < 0$, also gibt es $t \in [0,1]$ mit



$\| (1-t)u + ty - u \|^2 < \| v - u \|^2 \Rightarrow y \notin K$, damit $K \subseteq H$. $\square$

6. <u>Satz</u> Sei E ein Hilbertraum, sei $C \subseteq E$ kompakt. Dann ist $\overline{\mathrm{conv}}(C) = K \subseteq E$ auch kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$, sei $D = \{ u \in E \mid \|u\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \}$. Da C kompakt ist, gibt es $A \subseteq C$ endlich mit $C \subseteq A + D = \bigcup \{ a + D \mid a \in A \}$. Die konvexe Hülle L der endlichen Menge A in E ist das stetige Bild eines Simplex und daher kompakt. Also gibt es $B \subseteq L$ endlich mit $L \subseteq B + D$. Da L kompakt ist und D, L konvex sind, ist

$$D + L \subseteq E \quad \text{abgeschlossen, vgl. § 1, 15}$$

und konvex. Wir haben

$C \subseteq A + D \subseteq L + D \subseteq B + D + D$, also $\overline{\mathrm{conv}}(C) \subseteq L + D$
$\subseteq B + D + D$. Da $D + D \subseteq \{ v \in E \mid \|v\| < \varepsilon \} = U$
folgt $\overline{\mathrm{conv}}(C) \subseteq B + U$, damit ist $\overline{\mathrm{conv}}(C)$ total beschränkt und vollständig, also kompakt. $\square$

Ist E ein PräHilbertraum und $X \subseteq E$, so ist $X^\perp = \{ u \in E \mid \langle u | x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in X \}$ ein abg. Untervektorraum in E.

7. **Satz** Sei E ein Prä-Hilbertraum und sei $F \subseteq E$ ein vollständiger komplexer Untervektorraum. Dann gilt $E = F \oplus F^{\perp}$.

Beweis. Betrachte die Projektion $p : E \to F$. Für $u \in E$ setze $u_1 = p(u)$, $u_2 = u - u_1$. Beh: $u_2 \in F^{\perp}$.

Für jedes $w \in F - \{0\}$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|u_2\|^2 = \|u - p(u)\|^2 \leq \|u - u_1 + zw\|^2 = \|u_2 + zw\|^2$$

$$= \|u_2\|^2 + |z|^2 \|w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}\langle u_2 | w\rangle).$$

Mit $z = \frac{-1}{\|w\|^2}\langle u_2 | w\rangle$ folgt

$$0 \leq \frac{|\langle u_2|w\rangle|^2}{\|w\|^4}\|w\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\langle u_2|w\rangle\langle w|u_2\rangle\right)\frac{1}{\|w\|^2}$$

$$= -|\langle u_2|w\rangle|^2 \cdot \frac{1}{\|w\|^2} \Rightarrow \langle u_2|w\rangle = 0.$$ Es folgt:

$u_2 \in F^{\perp}$ und damit $E = F + F^{\perp}$. Da $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ folgt $E = F \oplus F^{\perp}$ (als Vektorraum und als topologisches Produkt) $\square$

Konvention Sei $(E, \|\cdot\|_E)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$. Wir setzen für $r>0$

$$B_r^E(0) = \{u \in E \mid \|u\|_E \le r\}.$$

Für $s>0$ folgt $s \cdot B_r^E(0) = B_{rs}^E(0)$ und

$$B_r^E(0) + B_s^E(0) \subseteq B_{r+s}^E(0).$$

8. **Lemma** Ein Prä-Hilbertraum $(E, \langle | \rangle)$ ist genau dann lokal kompakt, wenn E endliche Dimension hat.

Beweis Ist $\dim(E) = m$, so $E \cong \mathbb{C}^m$ lokalkompakt.

Angenommen, $\dim(E) = \infty$. Wähle induktiv Vektoren $u_n \in E$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$u_{n+1} \perp \{u_1, \ldots, u_n\}$$

das geht nach Satz §3.7, angewandt auf $F = \mathbb{C}u_1 + \ldots + \mathbb{C}u_m$. Für $n \neq m$ folgt $\|u_n - u_m\|^2 = 2$, also hat die Folge $(u_n)_{n\geq 1}$ keine konvergente Teilfolge. Damit ist $B_1^E(0)$ nicht kompakt. Aber dann ist $B_r^E(0) = r \cdot B_1^E(0)$ für kein $r>0$ kompakt $\Rightarrow$ E ist nicht lokal kompakt.

$\square$

<u>Bem</u> • § 3.5, 6, 8 gelten wesentlich allgemeiner in normierten Vektorräumen, aber dann sind die Beweise komplizierter.

• Ob ein Analogon v. § 3.6 in vollständigen CAT(0) - Räumen gilt, ist ein offenes Problem

• ** - Aufgabe: ein normierter Vektorraum $(E, \|.\|_E)$ ist genau dann ein Prä-Hilbertraum, wenn er CAT(0) ist.

Wir benötigen nun etwas Funktional analysis. Hier nennt man lineare Abbildungen Operatoren.

9. <u>Def</u> Sei $T: E \to F$ ein Operator, E und F seien normierte (komplexe) Vektorräume. Wir nennen T <u>beschränkt</u>, wenn für jede beschränkte Menge $X \subseteq E$ auch $T(X) \subseteq F$ beschränkt ist.

<u>Satz</u> Seien E, F normierte Vektorräume und sei $T: E \to F$ ein Operator. Dann sind äquivalent: (i) T ist stetig

(ii) T ist beschränkt

(iii) $T(B_1^E(0))$ ist beschränkt

Beis (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $T(B_\varepsilon^E(0)) \subseteq B_1^F(0)$ gilt. Dann folgt für alle $r > 0$, dass $T(B_r^E(0)) \subseteq B_{r/\varepsilon}^F(0)$, also ist T beschränkt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist klar

(iii) $\Rightarrow$ (i) Wähle $r > 0$ so, dass $T(B_1^E(0)) \subseteq B_r^F(0)$ gilt. Für jedes $\varepsilon > 0$ folgt dann $T(B_{\varepsilon/r}^E(0)) \subseteq B_\varepsilon^F(0)$, also ist T stetig in 0 und damit nach §1.5 stetig. □

10. Man setzt $\|T\| = \sup\{\|Tu\|_F \mid u \in B_1^E(0)\}$, falls T beschränkt ist. Es folgt daraus

$$\|Tu\|_F \le \|T\| \cdot \|u\|_E \quad , \text{ insbesondere also}$$

$\|Tu - Tv\|_F \le \|T\| \cdot \|u - v\|_E$ d.h. jeder beschränkte Operator T ist $\|T\|$-Lipschitzstetig.

Man nennt $\|T\|$ die Operatornorm von T.

Wir setzen $B(E,F) = \{T : E \to F \mid T$ beschränkter Operator$\}$. Dann ist $(B(E,F), \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Es gilt für $u, v \in E$, $S, T \in B(E,F)$, dass

$$\|(S+T)(u+v)\|_F \le \|S\| \cdot \|u\|_E + \|S\| \cdot \|v\|_E + \|T\| \cdot \|u\|_E + \|T\| \cdot \|v\|_E$$

Ist D normiert Vektorraum und ist

$S \in B(D,E)$, $T \in B(E,F)$ dann gilt

$\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$. (→ ÜA)

Ein vollständig normierter Vektorraum nennt man Banachraum.

Satz Sind E, F normiert Vektorräume und ist F vollständig, so ist $B(E,F)$ vollständig. Insbesondere ist der Dualraum $E^* = B(E, \mathbb{C})$ stets vollständig.

Ist E endlich dimensional, so ist jeder Operator $T: E \to F$ beschränkt.

Beweis Sei $(T_n)_{n \geq 0}$ eine Cauchyfolge in $B(E,F)$, $u \in E$.

Wegen $\|T_n u - T_m u\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|u\|_E$ ist dann auch $(T_n u)_{n \geq 0}$ eine Cauchyfolge. Wir setzen $Tu = \lim_n T_n u$.

Für $u, v \in E$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt

$T_n u + z T_n v - T_n(u + zv) = 0$, also auch

$Tu + zTv - T(u+zv) = 0 \Rightarrow T$ ist linear.

Sei $k \geq 0$ so, dass $\|T_n - T_m\| \leq 1$ für alle $m, n \geq k$.

Es folgt für $u \in B_1^E(0)$, dass

$$\|(T_n - T_k)(u)\| \leq \|T_n - T_k\| \leq 1 \Rightarrow \|(T - T_k)u\| \leq 1$$

$$\Rightarrow T - T_k \in B(E,F) \Rightarrow T \in B(E,F)$$

Angenommen, $\dim(E) = m$ und $u_1, \dots, u_m$ ist eine Basis von E. Sei $\|.\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^m$, $\|(z_1, \dots, z_m)\|_2 = \left(\sum |z_i|^2\right)^{1/2}$. Die bijektive lineare Abbildung $j: \mathbb{C}^m \to E$, $(z_1, \dots, z_m) \mapsto \sum_{k=1}^m z_k u_k$ ist stetig. Sei $S^{2m-1} = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C} \mid \|(z_1, \dots, z_m)\|_2 = 1\}$. Dann ist $j(S^{2m-1})$ kompakt, sei $s = \min\{\|v\|_E \mid v \in j(S^{2m-1})\}$. Es folgt $s > 0$ weil j bijektiv ist und damit für $r > 0$

$$B_1^E(0) \subseteq j\left(B_{1/s}^{\mathbb{C}^m}(0)\right) \Rightarrow j^{-1} \text{ ist stetig nach § 3.9.}$$

Setze $h: \mathbb{C}^m \to F$, $h(z_1, \dots, z_m) = z_1 T(u_1) + \dots + z_m T(u_m)$. Dann ist auch h stetig und $T = h \circ j^{-1}$ $\square$

11. <u>Satz</u> Sei $(E, \|.\|_E)$ ein normierter Vektorraum. Dann existiert ein vollständiger normierter Raum $(\hat{E}, \|.\|_{\hat{E}})$, eine lineare Abbildung $j: E \to \hat{E}$ mit $\|j(u)\|_{\hat{E}} = \|u\|$ für alle $u \in E$ und $j(E)$ ist dicht in $\hat{E}$. (j ist also <u>injektiv</u>)
Ist $(F, \|.\|_F)$ vollständig und ist $T: E \to F$ beschränkt, so existiert genau ein $\hat{T}: \hat{E} \to F$ beschränkt mit $\hat{T} \circ j = T$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "j"'] & F \\ \hat{E} \arrow[ur, "\hat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Man nennt $\hat{E}$ die Vervollständigung von E. Die universelle Eigenschaft unten sagt, dass $\hat{E}$ im wesentlichen eindeutig ist.

Insbesondere ist jeder endlich dimensionale normierte Vektorraum vollständig

<u>Beweis</u> Sei $C \subseteq E^{\mathbb{N}}$ der komplexe Vektorraum aller Cauchyfolgen in E und sei $N \subseteq C$ der komplexe Untervektorraum aller Folgen $(u_n)_{n\geq 0}$ mit $\lim_n u_n = 0$. Wir setzen $\hat{E} = C/N$.

Für $\underline{u} = (u_n)_{n\geq 0} \in C$ ist $(\|u_n\|_E)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ (Dreiecksungleichung der Norm), wir setzen $\|\underline{u}\| = \lim_n \|u_n\|_E$. Für $\underline{u} \in N$ folgt $\|\underline{u}\| = 0$, damit ist $\|\underline{u}+N\|_{\hat{E}} = \|\underline{u}\|$ eine Norm auf $\hat{E}$ (!) Für $u \in E$ setzen wir $j(u) = (u)_{n\geq 0} + N$ (die konstante Folge), es folgt $\|j(u)\|_{\hat{E}} = \|u\|_E$ und j ist linear. Angenommen, $\underline{u} \in C$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $k \geq 0$ so, dass $\|u_n - u_m\|_E \leq \varepsilon$ für alle $m,n \geq k$. Es folgt $\|\underline{u} - j(u_k)\|_{\hat{E}} \leq \varepsilon$. Damit $\lim_n j(u_n) = \underline{u} + N$, folglich ist $j(E) \subseteq \hat{E}$ dicht und jede Cauchyfolge in $j(E)$ hat einen Grenzwert in $\hat{E}$. Daher ist auch $\hat{E}$ vollständig.

Angenommen, F ist vollständig und $T : E \to F$ ist beschränkt. Für $\underline{u} \in G$ betrachte

$$\hat{T}(\underline{u}+N) = \lim_n T u_n \Rightarrow \hat{T} : \hat{E} \to F \text{ ist linear.}$$

Ist $\|\underline{u}+N\|_{\hat{E}} \leq 1$, so folgt

$$\limsup_n \|T u_n\| \leq \|T\| \Rightarrow \|\hat{T}(\underline{u}+N)\| \leq \|T\| \Rightarrow$$

$\hat{T}$ ist beschränkt, also stetig. Da $j(E) \subseteq \hat{E}$ dicht ist, hat $T \circ j$ höchstens eine stetige Fortsetzung auf $\hat{E}$ $\square$

<u>Korollar</u> Ist $(E, \langle | \rangle)$ ein prä-Hilbertraum, so ist $\hat{E}$ ein Hilbertraum mit $\langle | \rangle$ so, dass

$$\langle j(u) | j(v) \rangle = \langle u | v \rangle \text{ für alle } u, v \in E.$$

<u>Beweis</u> Auf $\hat{E}$ definieren wir

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|_{\hat{E}}^2$$

das ist <u>stetig</u> auf $\hat{E} \times \hat{E}$. Auf der dichten Teilmenge $j(E) \subseteq \hat{E}$ ist diese Abbildung eine positiv definite hermitesche Form, also auch auf ganz $\hat{E}$: z.B. $\langle j(u) | j(u) \rangle \geq 0$ für alle $u \in E$

$$\Rightarrow \langle x | x \rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in \hat{E}$$

$$\langle j(u) + j(v) | j(w) \rangle - \langle j(u) | j(w) \rangle - \langle j(v) | j(w) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x + y | z \rangle - \langle x | z \rangle - \langle y | z \rangle = 0 \quad \text{usw.}$$ $\square$

Bemerkung Ist E ein normierter Vektorraum und ist $F \subseteq E$ ein linearer Teilraum, so ist $\overline{F} \subseteq E$ ein lineares Teilraum, denn $\overline{F}$ ist Untergruppe nach §1.6 und für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z\overline{F} \subseteq \overline{zF} \subseteq \overline{F}$.

12. **Satz** (Riesz'scher Darstellungssatz) Sei E ein Hilbertraum. Für $u \in E$ sei $L(u) = \langle - | u \rangle : E \to \mathbb{C}$. Dann ist $L : E \to E^* = B(E, \mathbb{C})$ eine semilineare isometrische bijektive Abbildung.

Beweis $L(zu) = \bar{z} L(u)$, L ist semi-linear. Für $u \neq 0$ gilt $L(u)(u) = \langle u | u \rangle = \|u\|^2 \neq 0$, also ist L injektiv.
Sei $\xi \in E^* - \{0\}$ und sei $F = \ker(\xi)$. Wegen $E/_F \cong \mathbb{C}$ (Homomorphiesatz) hat F Kodimension 1 und wir haben $E = F \oplus F^\perp$ nach §3.7, mit $\dim F^\perp = 1$.
Sei $v \in F^\perp - \{0\}$, setze $u = \overline{\xi(v)} \frac{1}{\|v\|^2} v$. Es folgt
$\xi(u) = \overline{\xi(v)} \frac{1}{\|v\|^2} \xi(v) = \langle u | u \rangle$, also $\xi = L(u)$, denn $\ker(L(u)) = \ker(\xi) = F$. Folglich ist L surjektiv.

Für $v \in B_1^E(0)$ gilt $|L(u)(v)| = |\langle v | u \rangle| \le \|u\| \cdot \underbrace{\|v\|}_{\le \|u\|}$

$\Rightarrow \|L(u)\| \le \|u\|$. Für $u \neq 0$ ist aber

$\|L(u) \underbrace{\tfrac{1}{\|u\|} u}_{\in B_1^E(0)}\| = \|u\| \Rightarrow \|L(u)\| \ge \|u\|$ $\square$

13. __Satz__ Sei E ein Hilbertraum und sei $b: E \times E \to \mathbb{C}$ __sesquilinear__, d.h. b ist additiv in beiden Argumenten und $b(zu,v) = z\, b(u,v) = b(u, \bar{z} v)$.
Dann sind äquivalent:

(i) b ist stetig

(ii) es gibt $r \geq 0$ so, dass $|b(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot r$ für alle $u,v \in E$

(iii) es gibt $T \in B(E,E) = B(E)$ mit
$$b(u,v) = \langle u | Tv \rangle \quad \text{für alle } u,v \in E.$$

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, gilt $\|T\| \leq r$ und T ist eindeutig durch b bestimmt.

__Beweis__ (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $|b(u,v)| \leq 1$ für alle $u, v \in B_\varepsilon(0)$ gilt. Es folgt, dass für alle $u,v \in E$ gilt
$$|b(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \cdot \tfrac{1}{\varepsilon}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Für jedes $v \in E$ gilt $b(-,v) \in E^* = B(E,\mathbb{C}) \underset{§3.12}{\leadsto}$ es gibt genau ein $w \in E$ mit $b(-,v) = L(w)$. Setze $Tv = w \leadsto Lw = LTv = b(-,v) = \langle -, Tv \rangle$

Da b in zweitem Argument semilinear ist, ist T lineare Abbildung $T: E \to E$. Für $v \in B_1^E(0)$ gilt $\underset{\|Tv\|^2}{\langle Tv | Tv \rangle} = b(Tv, v) \leq \|Tv\| \cdot \|v\| \cdot r \leq \|Tv\| \cdot r$
$\leadsto \|Tv\| \leq r \leadsto \|T\| \leq r$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) ist klar.

Wäre $T' : E \to E$ linear mit $b(u,v) = \langle u | T'v \rangle$, so

$$= L(T'v)(u)$$
$$= L(Tv)(u)$$

$LT'(v) = LT(v)$ für alle $v \in V$

$\Rightarrow LT' = LT \underset{L \text{ bij.}}{\Rightarrow} T = T'$ $\square$

<u>Folgerung</u> Ist E ein Hilbertraum und ist $T \in \mathcal{B}(E)$, so gibt es genau ein $T^* \in \mathcal{B}(E)$ mit

$\langle Tu | v \rangle = \langle u | T^* v \rangle$ für alle u, v, und

$\| T^* \| \leq \| T \|$. Es folgt $T^{**} = T$ wegen

$\langle T^* v | u \rangle = \langle v | Tu \rangle$ und damit $\| T \| \leq \| T^* \|$, also

$$\| T \| = \| T^* \|$$

Man nennt T^* den zu T <u>adjungierten</u> Operator.

Ist $\underset{\langle u|v \rangle = \sum u_i \bar{v}_i}{E = \mathbb{C}^m}$, T Matrix, so ist T^* die transponiert-konjugierte Matrix.

Wenn gilt $T^* = T$, so heißt T <u>selbstadjungiert</u>.

Ist $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Unterraum, so ist zum Beispiel der Projektionsoperator

$$p : E = F \oplus F^\perp \to F$$

selbstadjungiert. (Ü 4)

Ist $T = T^*$, so folgt $\underset{\overset{\|}{\langle \bar{u} | Tu \rangle}}{\overset{\overset{\overline{\langle u | Tu \rangle}}{\|}}{\langle Tu | u \rangle}} \in \mathbb{R}$ für alle $u \in E$.

14. <u>Lemma</u> Sei E ein Prä-Hilbertraum und sei $T \in B(E)$ selbstadjungiert.

Dann gilt $\|T\| = \sup\{ |\langle Tu|u\rangle| \mid u \in B_1^E(0) \}$.

<u>Beweis</u>. Sei $\nu(T) = \sup\{ |\langle Tu|u\rangle| \mid u \in B_1^E(0) \}$.

Es folgt $|\langle Tu|u\rangle| \leq \nu(T) \cdot \|u\|^2$ sowie mit Cauchy-Schwarz $|\langle Tu|u\rangle| \leq \|T\| \cdot \|u\|^2 \Rightarrow \nu(A) \leq \|T\|$.

Betrachte die Identität

$$\langle T(x+y)|x+y\rangle - \langle T(x-y)|x-y\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle Tx|y\rangle$$

mit $x = su$, $y = \frac{1}{s}Tu$, $s > 0$. Es folgt

$$4\|Tu\|^2 \leq \nu(T)\left(\|su + \tfrac{1}{s}Tu\|^2 + \|su - \tfrac{1}{s}Tu\|^2\right)$$
$$= 2\nu(T)\left(s^2\|u\|^2 + \frac{1}{s^2}\|Tu\|^2 \right)$$

Ist $Tu \neq 0$, so setze $s = \sqrt{\frac{\|Tu\|}{\|u\|}}$ $\leadsto$

$4\|Tu\|^2 \leq 2\,\nu(T) \cdot 2 \cdot \|u\| \cdot \|Tu\| \leadsto \|Tu\| \leq \nu(T)\|u\|$.

Letzteres ist auch richtig, falls $Tu = 0$.

Es folgt $\|T\| \leq \nu(T)$ $\square$

15. Def Seien E, F normierte Vektorräume, sei F vollständig. Ein Operator $T: E \to F$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Menge $X \subseteq E$ das Bild $T(X) \subseteq F$ kompakten Abschluss hat. Ein kompakter Operator ist also beschränkt.

Bsp. E Hilbertraum, $F \subseteq E$ endlich dimensionaler Unterraum, $p: E = F \oplus F^\perp \to F$ Projektionsoperator. Dann ist p kompakt.

- F endlich dimensional $\Rightarrow$ jeder Operator $T \in \mathcal{B}(E,F)$ ist kompakt. #

16. Theorem (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren).

Sei E ein Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{B}(E)$ kompakt und selbstadjungiert. Sei $\sigma_p(T)$ die Menge aller Eigenwerte von T.

(*) Für $z \in \sigma_p(T)$ sei E_z der zugehörige Eigenraum, $E_z = \ker(T - z\,\mathrm{id}_E)$. Dann gilt:

(*) Man nennt $\sigma_p(T)$ das Punktspektrum von T.

(i) $\sigma_p(T) \subseteq \mathbb{R}$ und für $s,t \in \sigma_p(T)$, $s \neq t$ gilt $E_s \perp E_t$.

(ii) $\|T\| \in \sigma_p(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma_p(T)$

(iii) $\overline{\sum_{s\in\sigma_p(T)} E_s} = E$

(iv) $\sigma_p(T)$ ist höchstens abzählbar. Falls $z \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $\sigma_p(T)$ ist, so ist $z = 0$.

(v) Für jedes $s \in \sigma_p(T)$ mit $s \neq 0$ hat E_s endliche Dimension.

Bew. Wir können annehmen, dass $T \neq 0$, sonst stimmt sowieso alles.

(i) Ist $z \in \sigma_p(T)$, so folgt $\langle Tu|u\rangle = z\langle u|u\rangle \in \mathbb{R}$, weil $\langle Tu|u\rangle \in \mathbb{R}$. Ist also $u \in E_z - \{0\}$, so folgt $z \in \mathbb{R}$.

Ist $s,t \in \sigma_p(T)$ mit $s \neq t$, $u \in E_s - \{0\}$ $v \in E_t - \{0\}$, so folgt $t\langle u|v\rangle = \langle Tu|v\rangle = \langle u|Tv\rangle = s\langle u|v\rangle$
$\Rightarrow \langle u|v\rangle = 0$.

(ii) Mit §3.14 gibt es eine Folge $u_n \in B_1^E(0)$ mit $\lim_n |\langle Tu_n|u_n\rangle| = \|T\| \neq 0$. Durch Übergang auf eine Teilfolge können wir erreichen, dass $t = \lim_n \langle Tu_n|u_n\rangle = \pm\|T\|$ und $\lim_n Tu_n = v$ existieren.

Es gilt $\langle Tu_n | tu_n \rangle = t \langle Tu_n | u_n \rangle \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Nun

$$0 \leq \| Tu_n - tu_n \|^2 = \| Tu_n \|^2 - 2 \langle Tu_n | tu_n \rangle + t^2 \| u_n \|^2$$

$$\leq 2t^2 - 2t \langle Tu_n | u_n \rangle .$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0, also $\lim_n tu_n =$

$\lim_n Tu_n = v \Rightarrow \lim_n u_n = \frac{1}{t} v = u$ existiert und

$Tu = v = tu \Rightarrow t \in \sigma_p(T)$ und $|t| = \|T\|$.

(iii) Ist $D \subseteq E$ ein T-invarianter Teilraum, so

auch $D^\perp$, denn: $x \in D$, $y \in D^\perp$

$\langle Ty | x \rangle = \langle y | Tx \rangle = 0$. Der Teilraum

$F = \sum_{t \in \sigma_p(T)} E_t$ ist T-invariant, also auch

$T(\overline{F}) \subseteq \overline{F} \Rightarrow T(\overline{F}^\perp) \subseteq \overline{F}^\perp$. Die

Einschränkung von T auf $\overline{F}^\perp$ ist kompakt

und selbstadjungiert. Wenn also $\overline{F}^\perp \neq 0$,

so enthält $\overline{F}^\perp$ Eigenräume nach (ii) ↯.

Also $\overline{F}^\perp = 0$, d.h. $\overline{F} = E$.

(iv) und (v). Für $\varepsilon > 0$ sei $S = \{t \in \sigma_p(T) \mid |t| \geq \varepsilon\}$ sowie $D = \sum_{t \in S} E_t$. Beh: dim(D) < ∞.

Sonst gäbe es eine Folge $(u_n)_{n \geq 0}$ von Vektoren mit $\|u_n\| = 1$, $u_n \in E_s$ für ein $s \in S$ und $u_{n+1} \perp \{u_1, \dots, u_n\}$. Es folgt für $n \neq m$, dass

$$\|Tu_n - Tu_m\|^2 \geq \varepsilon \cdot 2 \quad \text{↯} \quad T \text{ kompakt.}$$

Also ist dim D endlich, also S endlich und für alle $s \in S$ ist E_s endlich dimensional. □

17. Def Sei E ein Hilbertraum. Ein (bijektiver) Operator $T: E \to E$ heißt unitär, falls $\|Tu\| = \|u\|$ für alle $u \in V$ gilt. ~~und falls T~~

Sei G eine topologische Gruppe. Eine lineare stetige Wirkung $G \times E \to E$, für die jedes $g \in G$ als unitärer Operator wirkt, heißt Hilbert G-Modul.

Beispiel $E = \mathbb{C}^m$ mit $\langle u|v\rangle = \sum u_k \bar{v}_k$, G Untergruppe der unitären Gruppe $U(m) = \{g \in \mathbb{C}^{m \times m} \mid g^* g = \mathbb{1}\}$ $\quad (g_{ij})^* = (\bar{g}_{ji})$

$\leadsto G \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ unitäre Wirkung.

Ist G eine lokal kompakte Gruppe, so ist $L^2(G) = \widehat{C_c(G,\mathbb{C})}$ die Vervollständigung bezüglich der Norm $\|\varphi\| = \sqrt{\int_G |\varphi|^2}$, die zur hermiteschen Form $\langle \varphi | \psi \rangle = \int_G \varphi \bar{\psi}$ gehört.

18. <u>Lemma</u> Die Wirkung von G auf $C_c(G,\mathbb{C})$ ist treu: zu jedem $g \in G - \{e\}$ gibt es φ mit $g\varphi \neq \varphi$.

<u>Beweis</u> Sei $g \in G - \{e\}$, sei $U \subseteq G$ Einsumgebung mit $UU^{-1} \subseteq G - \{g\} \Rightarrow g \notin UU^{-1} \Rightarrow gU \cap U = \emptyset$. Sei $\varphi \in C_c^+(G) - \{0\}$ mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq U$. Es folgt $g\varphi = \varphi \circ \lambda_{g^{-1}} \neq \varphi$, weil $\mathrm{supp}(g\varphi) \subseteq gU$. $\square$

<u>Theorem</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann setzt sich die Wirkung $G \times C_c(G,\mathbb{C}) \to C_c(G,\mathbb{C})$ fort zu einem Hilbert G-Modul, der treu ist,

$$G \times L^2(G) \to L^2(G)$$

<u>Beweis</u> Da $\int_G$ links invariant ist, gilt für jedes $g \in G$, $\varphi \in C_c(G,\mathbb{C})$ $\|g\varphi\| = \|\varphi\|$. Nach §3.11 setzt sich für jedes $g \in G$ die Abbildung $g: C_c(G,\mathbb{C}) \to C_c(G,\mathbb{C})$ linear und beschränkt fort auf $L^2(G)$. Es folgt $\|g\varphi\| - \|\varphi\| = 0$ auf $L^2(G)$. Also wirkt jedes $g \in G$ unitär auf $L^2(G)$.

<u>Beh</u> Sei $\varepsilon > 0$, $\psi \in L^2(G)$. Dann gibt es eine Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass für alle $\varphi \in L^2(G)$ mit $\|\varphi - \psi\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ und alle $v \in V$ und alle $g \in G$ gilt:

$$\|g\varphi - gv\varphi\| \leq \varepsilon$$

Insbesondere ist $G \times L^2(G) \to L^2(G)$ stetig.

<u>Beweis der Beh</u> Wähle $\rho \in C_c(G,\mathbb{C})$ mit $\|\psi - \rho\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Sei $C = \mathrm{supp}(\rho)$. Sei $U \subseteq G$ eine Einsumgebung mit $\overline{U}$ kompakt, sei $\eta: G \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger und mit $\emptyset \neq \mathrm{supp}(\eta) \supseteq \overline{U}C$, vgl. 2.11. Wähle nun symmetrische Einsumgebung $V \subseteq U$ so,

dass für alle $v \in V, x \in G$ gilt

$$|g(x) - g(v^{-1}x)| \cdot \|\eta\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Dann gilt sogar $|g(x) - g(v^{-1}x)| \cdot \|\eta\| \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot \eta(x)$,

denn: $\circ\ x \in \bar{U} G' \Rightarrow \eta(x) = 1$

$\circ\ x \notin \bar{U} G \Rightarrow x \notin G'$ und $v^{-1}x \notin G \Rightarrow LS = 0$

Integrieren das Quadrat der Ungleichung:

$$\int |g - vg|^2 \cdot \|\eta\|^2 \leq \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \|\eta\|^2 \Rightarrow \|g - vg\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ist $\|\varphi - \psi\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ so ist $\|\varphi - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$\|g\psi - gv\varphi\| = \|\psi - v\varphi\| \leq \|\psi - g\| + \|g - vg\| + \underbrace{\|vg - v\varphi\|}_{\|g - \varphi\|}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

19. Konvention. Ist G kompakt, so wählen wir das komplexe Haar-Integral so, dass $\int_G 1 = 1$ gilt. ("G hat Masse 1")

Auf kompakten Gruppen können wir mit dem komplexen Haar Integral Mittelwerte bilden.

Theorem Sei G eine kompakte Gruppe mit normalisiertem komplexen Haar-Integral $\int_G$, sei E ein Hilbert-G-Modul und sei $T \in B(E)$. Dann gibt es genau ein $\tilde{T} \in B(E)$ mit

$$\langle u | \tilde{T} v \rangle = \int_G \langle g^{-1} u | T g^{-1} v \rangle \, dg \qquad \text{für } u, v \in E$$

Es gilt $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$ und für alle $h \in G$

$$\tilde{T} h = h \tilde{T}.$$

Ist T selbstadjungiert (bzw. kompakt), so auch $\tilde{T}$.

Beweis Die Abbildung $G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \langle g^{-1} u | T g^{-1} v \rangle$ ist stetig, also in $C_c(G, \mathbb{C})$, da G kompakt ist.

Sei $b(u,v) = \int_G \langle g^{-1} u | T g^{-1} v \rangle \, dg$. Dann ist b sesquilineare Abbildung $E \times E \to \mathbb{C}$.

Wegen

$$|\langle g^{-1} u | T g^{-1} v \rangle| \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|T\| \cdot \|g^{-1} u\| \cdot \|g^{-1} v\| = \|T\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

folgt

$$|b(u,v)| \leq \int_G \|T\| \cdot \|u\| \cdot \|v\| \, dg = \|T\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|$$

$\rightsquigarrow$ b ist stetig nach § 3.13 und es gibt genau ein $\tilde{T} \in \mathcal{B}(E)$ mit $b(u,v) = \langle u | \tilde{T} v \rangle$.

Weiter gilt nach § 3.13, dass $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

Für $h \in G$ ist

$$\int_G \langle g^{-1} h u | T g^{-1} h v \rangle \, dg = \int_G \langle (h^{-1} g)^{-1} u | T (h^{-1} g)^{-1} v \rangle \, dg$$

$$= \int_G \langle g^{-1} u | T g^{-1} v \rangle \, dg \quad \rightsquigarrow \quad \underset{\substack{\| \\ \langle u | h^{-1} \tilde{T} h v \rangle}}{b(hu, hv)} = b(u,v)$$

$\rightsquigarrow$ $h^{-1} \tilde{T} h = \tilde{T}$

Ist T selbstadjungiert, so folgt $b(u,v) = \overline{b(v,u)}$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{T}$ selbstadjungiert.

Angenommen, T ist kompakt. Sei $A = \overline{T(B_1^E(0))} \subseteq E$

$\rightsquigarrow$ A kompakt $\rightsquigarrow$ $GA = \{ga \mid g \in G, a \in A\} \subseteq E$ kompakt

$\Rightarrow$ $K = \overline{\operatorname{conv}}(GA)$ kompakt, vgl. § 3.6.

Ist $H = H(w,s) \subseteq E$ Halbraum mit $K \subseteq H$

$\big[\, H(w,s) = \{x \in E \mid \operatorname{Re} \langle x | w \rangle \leq s\} \,\big]$

so gilt für $u \in B_1^E(0)$, $g \in G$, dass

$g T g^{-1} u \in GA \subseteq K$, also

$$\mathrm{Re}\,\langle \tilde{T}u \mid w\rangle = \mathrm{Re}\,\langle w \mid \tilde{T}u\rangle$$

$$= \mathrm{Re}\int_G \langle g^{-1}w \mid T g^{-1}u\rangle\, dg = \int_G \mathrm{Re}\,\langle w \mid g^{-1} T g^{-1} u\rangle\, dg$$

$$\leq \int_G s\, dg = s, \quad \text{damit } \tilde{T}u \in H(w,s).$$

Mit § 3.5 (Banach-Hahn-Mazur) folgt für $r>0$

$$\hat{T}\left(B_r^E(0)\right) \subseteq \underbrace{r\cdot K}_{\text{kompakt}} \Rightarrow \tilde{T} \text{ kompakt.} \qquad \square$$

30. <u>Def</u> Sei G eine topologische Gruppe. Ein Hilbert G-Modul $E \neq \{0\}$ heißt <u>irreduzibel</u> oder <u>einfach</u>, wenn $\{0\}$ und E die einzigen in E enthaltenen Hilbert G-Moduln sind.

<u>Lemma</u> Sei $E \neq \{0\}$ ein Hilbert G-Modul der kompakten Gruppe G. Dann enthält E einen irreduziblen Hilbert G-Modul F endlicher Dimension.

<u>Beweis</u> Wir wählen $w \in E - \{0\}$ und setzen

$$T(u) = \langle u \mid w\rangle w, \quad \underbrace{T: E \to \mathbb{C}w}_{\text{Projektion}}$$

Dann ist T selbstadjungiert, denn

$\langle Tu|v\rangle = \langle \langle u|w\rangle w|v\rangle = \langle u|w\rangle\langle w|v\rangle$
$= \langle u|Tv\rangle$

und kompakt, da $T(D_1^E(0)) \subseteq \mathbb{C}w$ beschränkt ist.

Wir betrachten $\tilde{T}$ wie in § 3.19. Dann ist $\tilde{T}$ kompakt und selbstadjungiert. Es gilt

$$\langle g^{-1}w|Tg^{-1}w\rangle = \langle g^{-1}w|\langle g^{-1}w|w\rangle w\rangle = \underbrace{|\langle g^{-1}w|w\rangle|^2}_{\neq 0 \text{ für } g=e} \geq 0$$

$\Rightarrow \langle w|\tilde{T}w\rangle > 0 \Rightarrow \tilde{T} \neq 0$

Folglich hat $\tilde{T}$ einen endlich dimensionalen Eigenraum $E_\lambda \neq 0$. Da $h\tilde{T} = \tilde{T}h$ für alle $h \in G$ gilt, folgt $hE_\lambda \subseteq E_\lambda$ für alle $h \in G \Rightarrow E_\lambda$ ist endlich-dimensionaler Hilbert G-Modul. Wähle nun in E_λ einen minimalen G-invarianten Teilraum $F \subseteq E_\lambda$, $F \neq 0$. Dann ist F irreduzibler G-Modul. □

<u>Korollar</u> Ist G kompakte Gruppe, so hat jeder irreduzible Hilbert G-Modul endliche Dimension. #

21. <u>Theorem</u> (Hauptsatz über Hilbert G-Moduln für kompakte Gruppen).
Sei E ein Hilbert G-Modul für eine kompakte Gruppe G. Dann gibt es eine Familie $(F_i)_{i\in I}$ von irreduziblen endlich dimensionalen Hilbert G-Moduln $F_i \subseteq E$, $F_i \neq 0$ mit $F_i \perp F_j$ für $i \neq j$ so, dass $E = \overline{\sum_{i\in I} F_i}$ gilt.

Beweis Sei $\mathcal{F} = \{ F \subseteq E \mid F$ irreduzibler Hilbert G-Modul $\}$. Sei K eine Menge mit $\# K > \# \mathcal{F}$, sei P die Menge aller Abbildungen $F : I \to \mathcal{F}$ mit $I \subseteq K$, $F_i \perp F_j$ für $i \neq j$. Wir ordnen P partiell durch $F \leq F' :\iff F' : I' \to \mathcal{F}$ ist Fortsetzung von $F : I \to \mathcal{F}$, $I \subseteq I'$. Ist $E \neq 0$, so ist $\mathcal{F} \neq \emptyset$, nach Zorns Lemma gibt es in P maximale Elemente. Sei $F : I \to \mathcal{F}$ solch ein maximales Element, sei $D = \overline{\sum_{i \in I} F_i}$. Wäre $D \neq E$, so $E = D \oplus D^{\perp}$ mit $D^{\perp} \neq 0$. Dann gäbe es nach Lemma §3.20 aber ein $H \subseteq D^{\perp}$, $H \in \mathcal{F}$. Wähle $k \in K - I$, setze $F_k = H$ ↯ zur Maximalität von F in P. Also ist $D^{\perp} = 0$. □

Überlegung: Ist E ein m-dimensionaler Hilbertraum, so ist E als Hilbertraum isomorph zu $\mathbb{C}^m$, denn man kann in E eine ONB $v_1, \dots, v_m$ wählen. ⇝ $E \xrightarrow{f} \mathbb{C}^m$, $v_k \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - k$

Ist E ein Hilbert G-Modul, so erhalten wir einen Homomorphismus $G \to U(m)$, vgl. §3.17

unitäre Gruppe

22. <u>Theorem</u> (Peter–Weyl). Sei G eine kompakte Gruppe. Dann gibt es Zahlen $m_i \geq 1$, $i \in I$ ev. unendliche Indexmenge und einen injektiven abgeschlossenen Morphismus

$$\rho : G \to \prod_{i \in I} U(m_i)$$

<u>Beweis</u> Wir wählen einen treuen Hilbert G-Modul E, zum Beispiel $E = L^2(G)$, zerlegen ihn wie in § 3.21 als $E = \overline{\sum_{i \in I} F_i}$, F_i irreduzibel, $F_i \perp F_j$ für $i \neq j$. Sei $m_i = \dim(F_i)$. Wir erhalten aus den Hilbert G-Moduln F_i Morphismen

$$\rho_i : G \to U(m_i) \quad \text{und damit}$$

$$\rho : G \to \prod_{i \in I} U(m_i)$$

Da E treu ist, ist $\ker(\rho) = \{e\}$, da G kompakt ist, ist ρ abgeschlossen. $\square$

<u>Korollar</u> Ist G kompakte Gruppe und $g \in G - \{e\}$, so gibt es einen Morphismus $f : G \to U(m)$ für ein $m \geq 1$ mit $f(g) \neq \mathbb{1}$.

23. **Lemma** Sei Γ abelsche Gruppe, sei $E \neq \{0\}$ ein endlich dimensionaler irreduzibler Γ-Modul (d.h. die einzigen Γ-invariante Teilräume sind $\{0\}$ und E). Dann ist

$$\dim(E) = 1 \qquad E \cong \mathbb{C}$$

Beweis Sei $\gamma \in \Gamma$, sei $z \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der lin. Abbildung $\gamma : E \to E$ mit Eigenraum E_z. Für $\alpha \in \Gamma$, $u \in E_z$ folgt

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\gamma\alpha(u)}{\underset{\shortparallel}{\alpha\gamma(u)}} = \alpha(zu) = z\,\alpha(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(E_z) \subseteq E_z$$

also ist $E_z = \{0\}$ ↯ oder $E_z = E \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}\cdot z$

Damit ist jeder Teilraum $F \subseteq E$ Γ-invariant

$\Rightarrow \dim E = 1$ □

Korollar Ist G eine kompakte abelsche Gruppe, so gibt es eine Menge I so, dass G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $\prod_{i \in I} U(1)$ ist. □

24. <u>Theorem</u> Sei G eine kompakte Gruppe und sei $U \subseteq G$ eine Einsumgebung. Dann gibt es einen abgeschlossenen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq U$ und einen Morphismus

$$f : G \to U(m) \qquad m \geq 1$$

mit $\ker(f) = N$.

<u>Beweis</u> Wir kennen die Einbettung

$$\rho : G \to \prod_{i \in I} U(m_i) \quad \text{aus } \S 3.22$$

Es gibt $I_0 \subseteq I$ <u>endlich</u>, $I_1 = I - I_0$ und offene Mengen $V_i \subseteq U(m_i)$ mit

$$i \in I_1 \Rightarrow V_i = U(m_i)$$

$$\rho^{-1}\Big(\prod_{i \in I} V_i\Big) \subseteq U \qquad \text{(nach Definition der Produkttopologie)}$$

Setze $M_i = \begin{cases} 1 & i \in I_0 \\ U(m_i) & i \in I_1 \end{cases}$

es folgt: $M = \prod_{i \in I} M_i \trianglelefteq \prod_{i \in I} U(m_i)$

$N = \rho^{-1}(M) \subseteq U$ $\qquad M \subseteq \prod_{i \in I} V_i$

$$p: \prod_{i\in I} U(m_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} U(m_i)\Big/ M \cong \prod_{i\in I_0} U(m_i).$$

Dann ist für $f = p\circ g$ $\ker(f) = N \subseteq U$ und

$$p\circ g(G) \subseteq \prod_{i\in I_0} U(m_i) \subseteq U(m) \qquad m = \sum_{i\in I_0} m_i$$

$$\sum_{i\in I_0} \mathbb{C}^{m_i} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^m$$

$\square$

Korollar Ist G eine kompakte Gruppe, die keine kleinen Untergruppen hat, so gibt es $m \geq 1$ so, dass G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $U(m)$ ist.

25. Satz Sei G kompakt und sei E ein irreduzibler Hilbert G-Modul. Dann gibt es in $C_c(G,\mathbb{C}) \subseteq L^2(G)$ ein zu E isomorphen Untermodul. #

Beweis Wir wählen einen Isomorphismus von Hilberträumen $E \cong \mathbb{C}^m$ und erhalten

$$f: G \to U(m) \subseteq \mathbb{C}^{m\times m}.$$

Für $k=1,\dots,m$ sei $\varphi_k = \overline{F}_{k,1}$, sei $\tilde{E} \subseteq C_c(G,\mathbb{C})$ der Aufspann von $\varphi_1,\dots,\varphi_m$.

Es folgt nun

$$(g\varphi_k)(x) = \overline{F}_{k,1}(g^{-1}x) = \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_{k,j}(g^{-1})\,\overline{F}_{j,1}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} F_{jk}(g)\,\varphi_k(x)$$

Die Abbildung $h:\mathbb{C}^m \to \tilde{E}$, $(z_1,\dots,z_m) \mapsto \sum z_j \varphi_j$ ist also G-äquivariant.

Beh: Es gibt $s>0$ so, dass $\|h(z_1,\dots,z_m)\| = \left(\sum_{k=1}^{m} |z_k|^2\right)^{1/2}$. Denn es gibt nach §3.13 genau eine selbstadjungierte Matrix T mit

$$\langle u | v \rangle = \langle h(u) | T h(v) \rangle \qquad u,v \in \mathbb{C}^m$$

Beide Seiten sind G-invariant $\Rightarrow$ T vertauscht mit allen $g \in G$. $T \neq \mathrm{id}\cdot s \Rightarrow T$ hat Eigenraum $\neq \{0\}, \mathbb{C}^m$ ↯ $\square$

<u>Ausblick</u> Für eine lokal kompakte Gruppe G ist das <u>unitäre Dual</u> $\hat{G}$ ein Repräsentantensystem aller irreduziblen Hilbert G-Moduln.

Wir haben gezeigt: ist G <u>kompakt</u>, so gilt

$$L^2(G) = \overline{\bigoplus_{E \in \hat{G}} \underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{m_E}} \qquad m_E \geq 1$$

Eine genauere Analyse zeigt: $m_E = \dim E$

Für <u>nicht kompakte</u> Gruppen ist die Situation erheblich komplizierter.