§ 2 Lokalkompakte Gruppen und das Haar-Integral

Wir nennen eine topologische Gruppe lokalkompakt (kompakt), wenn G Hausdorffsch und lokalkompakt (kompakt) ist. Ab jetzt sind alle betrachteten Gruppen Hausdorffsch.

Satz Sei G eine lokalkompakte Gruppe und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist H genau dann abgeschlossen, wenn H lokalkompakt ist. Wenn H abgeschlossen ist, dann ist auch G/H lokalkompakt.

Beweis Abgeschlossene Teilmengen von lokalkompakten Räumen sind wieder lokalkompakt. Die Umkehrung folgt aus Korollar §1.3.
Ist $H \subseteq G$ abgeschlossen und $gH \in G/H$, so müssen wir zeigen, dass gH eine kompakte Umgebung hat. Sei $V \subseteq G$ eine offene Einsumgebung mit kompaktem Abschluss $\overline{V}$. Dann ist $p(Vg) \subseteq G/H$ offen, weil $p: G \to G/H$ offen ist, und $p(\overline{V}g)$ ist kompakt. Also ist $p(\overline{V}g)$ eine kompakte Einsumgebung von $p(g) = gH$ $\square$

#

2. Lemma Sei G eine lokal kompakte top. Gruppe. Dann hat G eine σ-kompakte offene Untergruppe $H \leq G$.

Beweis Sei C eine kompakte symmetrische Einsumgebung. Dann ist $H = \langle C \rangle = C \cup CC \cup CCC \cup \ldots$ eine σ-kompakte offene Untergruppe nach §1.11. $\square$

3. Theorem Sei G eine σ-kompakte lokalkompakte Gruppe und sei $(V_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von Einsumgebungen. Dann gibt es einen kompakten Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \bigcap_{n \geq 0} V_n$ so, dass G/N metrisierbar ist.

Beweis Sei $(A_n)_{n \geq 0}$ eine Familie von kompakten Teilmengen von G mit $G = \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Wir setzen $L_n = A_0 \cup \ldots \cup A_n$, dann sind die L_n kompakt und $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \ldots$, $G = \bigcup_{n \geq 0} L_n$.

Wir benutzen Lemma §1.21. Für $n \geq 1$ sei $K_n = G$. Für $n \leq 0$ wählen wir kompakte symmetrische Einsumgebungen $K_n \subseteq G$ wie folgt.

Sei K_{n+1} gegeben. Für alle $a \in L_n$ gilt $r_a(1) = a\,1\,a^{-1} = 1$. Nach Wallace' Lemma gibt es eine Einsumgebung W so, dass für alle $(a,g) \in L_n \times W$ gilt $a g a^{-1} \in K_{n+1}$. Wir wählen $K_n \subseteq W \cap V_{-n}$ kompakte, symmetrische Einsumgebung mit $K_n K_n K_n \subseteq K_{n+1}$.

Sei l die zugehörige Längenfunktion auf G und

$N = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} K_n = \{ g \in G \mid l(g) = 0 \}$. Dann ist $N \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe, und für alle $n \geq 0$ ist $N \subseteq V_n$.

Ist $a \in L_m$, so auch $a \in L_{m+s}$ für alle $s \geq 0$.

Ist $g \in N$, so auch $g \in K_{-m-s}$ für alle $s \geq 0$.

Dann ist also $r_a(g) \in K_{-m-s+1}$ für alle $s \geq 0$

$\Rightarrow r_a(g) \in N$, damit $a N a^{-1} \subseteq N \Rightarrow N \trianglelefteq G$, weil $G = \bigcup_{n \geq 0} L_n$.

Für alle $h \in gN$ gilt nun $l(h) = l(g)$, also ist $\bar{l} : G/N \to \mathbb{R}$, $\bar{l}(gN) = l(g)$ wohldefiniert.

Da G/N die Quotiententopologie bezüglich $G \xrightarrow{p} G/N$ trägt, ist $\bar{l} : G/N \to \mathbb{R}$ eine stetige Längenfunktion.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R} \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\bar{l}"'] & \end{tikzcd}$$

Da $\ell(g^{-1}h)=0$ genau dann gilt, wenn $gN=hN$ ist $\bar{d}(gN,hN)=\ell(g^{-1}h)$ eine stetige Metrik auf G/N.

Angenommen, $W\subseteq G/N$ ist eine offene Einsumgebung.

Beh es gibt $m\le 0$ mit $p(K_m)\subseteq W$. Denn sonst betrachte die kompakten Mengen $\underbrace{K_m - p^{-1}(W)}_{K_m'}$, $m\le 0$.

$$K_0'\supseteq K_{-1}'\supseteq \dots \supseteq K_{-m}'\supseteq \dots$$

Wenn die K_m' alle nicht leer sind, so auch $\bigcap_{m\le 0} K_m' \neq \emptyset$, aber $N=\bigcap_{m\le 0} K_m \subseteq p^{-1}(W)$ ↯

Ist $p(K_m)\subseteq W$, so ist der Ball $\{hN \mid \bar{d}(N,hN)<2^{-m}\}$ in W enthalten.

Da $\bar{d}$ linksinvariant ist, enthält jede Umgebung jedes Punktes $gN\in G/N$ einen kleinen $\bar{d}$-Ball. $\square$

4. __Def__ Eine (Hausdorffsche) topologische Gruppe G hat __keine kleinen Untergruppen__, wenn es eine Einsumgebung $U\subseteq G$ gibt, so dass die einzige in U enthaltene Untergruppe $\{e\}$ ist.

Ist $K\to G$ ein injektiver Morphismus von top. Gruppen und hat G keine kleinen Untergruppen, so auch K.

Korollar Ist G eine lokalkompakte Gruppe ohne kleine Untergruppen, so hat G eine offene metrisierbare Untergruppe. $\square$

Beweis Sei $U \subseteq G$ eine Einsumgebung, die keine nicht triviale Untergruppe enthält. Sei $H \subseteq G$ eine offene σ-kompakte Untergruppe, vgl §2.2. Setze $U_n = U \cap H$ für alle $n \geq 0$, wende Theorem §2.3 an und es gibt einen kompakten Normalteiler $N \trianglelefteq H$ mit $N \subseteq U_n$ so, dass H/N metrisierbar ist. Also $N = \{1\}$. $\square$

5. **Lemma** Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Wenn $V \subseteq G$ eine kompakte offene Einsumgebung ist, so enthält V eine offene Untergruppe $H \subseteq G$.

Beweis Wende Wallace' Lemma an auf $V \times \{e\} \subseteq V \times V$: es gibt eine symmetrische Einsumgebung $U \subseteq V$ mit $VU \subseteq V$. Also $UU \subseteq V$ und

$\underbrace{U \cdots U}_{k \geq 1} \subseteq V$ für alle $k \geq 1$ und $H = \langle U \rangle = U \cup UU \cup$

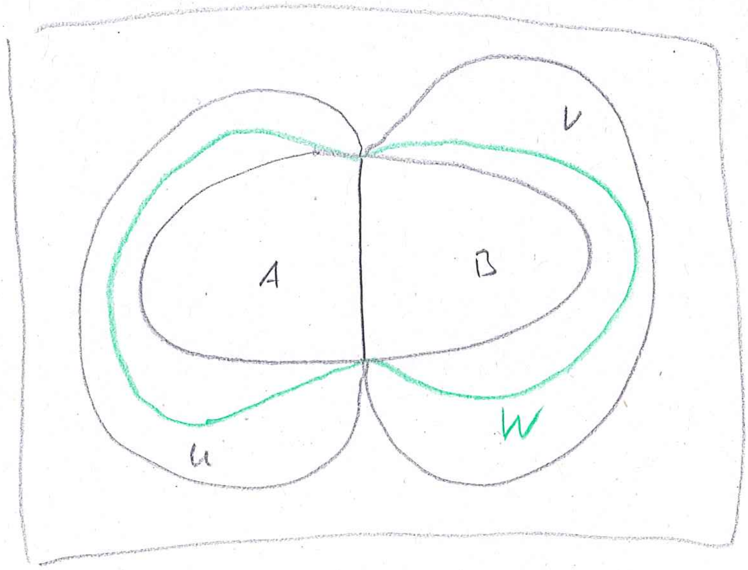
$UUU \cup \ldots \subseteq V$ $\square$

Wir brauchen ein Ergebnis über lokalkompakte total unzusammenhängende Räume.

6. <u>Lemma A</u> Sei X ein kompakter Raum, sei $x \in X$. Die Menge $Q(x) = \bigcap \{ D \subseteq X \mid x \in D$ und D ist offen und kompakt$\}$ ist zusammenhängend.

<u>Beweis</u> $Q(x)$ ist abgeschlossen und enthält x. Angenommen, $Q(x) = A \,\dot\cup\, B$, A, B abgeschlossen und $x \in A$. Wir zeigen, dass $B = \emptyset$.

Da X normal ist (weil kompakt) gibt es offene disjunkte Mengen U, V mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$. Sei $C = X - (U \cup V) \rightsquigarrow C \cap Q(x) = \emptyset$



Für jedes $c \in C$ gibt es also eine offene abg. Menge W_c mit $x \in W_c$ und $c \notin W_c$.

Die Mengen $X - W_c$ überdecken also $C \rightsquigarrow C \subseteq (X - W_{c_1}) \cup \ldots \cup (X - W_{c_m})$ da C kompakt. Sei $W = W_{c_1} \cap \ldots \cap W_{c_m} \rightsquigarrow C \cap W = \emptyset$ und $Q(x) \subseteq W$, weil W offen und abg. ist.

$Y = U \cup (X - W)$ offen $\quad Z = (V \cap W)$ offen

$X = Y \,\dot\cup\, Z \rightsquigarrow Y$ abg $\rightsquigarrow Q(x) \subseteq Y \rightsquigarrow B = \emptyset$. □

Lemma B. Sei X ein lokal kompakt total unzusammenhängender Raum, sei $x \in X$. Dann hat x beliebig kleine kompakte offene Umgebungen.

Beweis. Sei $V \subseteq X$ eine Umgebung von x. Wir suchen eine kompakte offene Menge U mit $x \in U \subseteq V$. OE ist V offen und $\overline{V}$ kompakt (sonst verkleinere V). Sei $A = \overline{V} - V$. Wenn $A = \emptyset$ so setze $U = V$, fertig. Sonst wende Lemma A auf $\overline{V}$ an. Für jedes $a \in A$ existiert eine kompakte Umgebung $U_a \subseteq \overline{V}$ von x, die a nicht enthält und die offen ist in $\overline{V}$. Dann $\bigcap \{U_a \mid a \in A\} \cap A = \emptyset$, also gibt es $a_1, \ldots, a_n \in A$ mit $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n} \cap A = \emptyset$. Dann ist U abg und offen in $\overline{V}$ und $U \subseteq \overline{V} - A \subseteq V$, also ist U offen in V. $\square$

7. <u>Theorem</u> (<u>van Dantzigs Theorem</u>)

Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent: (i) G ist total unzusammenhängend.

(ii) jede Einsumgebung enthält eine offene Untergruppe.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $U \subseteq G$ eine Einsumgebung. Dann existiert nach §2.6 Lemma D eine kompakte offene Einsumgebung $V \subseteq G$. Nach §2.5 enthält V eine offene Untergruppe.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $g \in G - \{e\}$. Dann gibt es eine offene Untergruppe $H \subseteq G$ mit $H \subseteq G - \{g\}$.
Also gibt es keine zush. Menge $C \subseteq G$ mit $e, g \in C$
$\rightsquigarrow G^\circ = \{e\}$ $\square$

<u>Korollar</u> Wenn eine lokal kompakte total unzush. Gruppe G <u>keine</u> kleinen Untergruppen hat, so ist G diskret.

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq G$ eine Einsumgebung, die keine echten Untergruppen enthält. Nach §2.7 (ii) ist $\{e\} \subseteq G$ offen. $\square$

Für <u>kompakte</u> total unzush. Gruppen lässt sich mehr sagen.

8. Theorem Sei G eine kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent:

(i) G ist total unzush.

(ii) Jede Einsumgebung $U \subseteq G$ enthält einen offenen Normalteiler $N \trianglelefteq G$.

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) folgt aus § 2.7.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nach § 2.7 gibt es eine offene Untergruppe $H \leq G$ mit $H \subseteq U$. Da $G = \bigcup G/H$ kompakt ist, ist G/H endlich. Sei $N \trianglelefteq G$ der Kern der Wirkung von G auf G/H $\rightsquigarrow$ $[G:N] < \infty$ und $N = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ ist abg. Da G/N endlich und damit diskret ist, ist $N \subseteq G$ offen. $\square$

Eine kompakte Gruppe G, die Bedingung (ii) aus §2.8 erfüllt, heißt *profinite* oder *proendliche* Gruppe. Wir betrachten jetzt solche Gruppen.

Angenommen, $(F_i)_{i \in I}$ ist eine Familie von endlichen Gruppen. Dann ist jedes F_i bzgl. der diskreten Topologie kompakt, also auch

$$G = \prod_{i \in I} F_i$$

9. __Lemma__ Ein Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ von total unzush. top. Räumen ist total unzush.

__Bew__ Sei $\emptyset \neq D \subseteq X$ zush. Dann ist für jedes $i \in I$ auch $pr_i(D) \subseteq X_i$ zush, also ein Punkt. Folglich ist D einelementig □

Damit ist insbesondere $G = \prod_{i \in I} F_i$ kompakt und total unzusammenhängend.

10. __Lemma__ Sei G eine profinite Gruppe, sei $g \in G - \{e\}$. Dann gibt es ein $n \geq 1$ und einen Morphismus von top. Gruppen $G \xrightarrow{\rho} GL_n(\mathbb{C})$ mit $\rho(g) \neq \mathbb{1}$.

__Beweis__ Sei $N \trianglelefteq G$ offen mit $N \subseteq G - \{g\}$, vgl. § 2.8. Dann ist G/N diskret, also endlich (weil G kompakt) $\leadsto F = G/N$ endliche Gruppe.
Es gibt dann eine treue Darstellung $f : F \to GL_n(\mathbb{C})$, (etwa mit $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^F$, Linkswirkung von F auf der Basis $F \subseteq \mathbb{C}^F$). Insgesamt ist dann $\rho = f \circ p$

$G \xrightarrow{p} G/N \xrightarrow{f} GL_n(\mathbb{C})$ der gewünschte Morphismus. □

Lemma § 2.10 ist die "Babyversion" des Peter-Weyl-Theorems, das unser nächstes großes Ziel ist: das gleiche Ergebnis gilt für jede kompakte Gruppe.

<u>Satz</u> Sei G eine profinite Gruppe. Dann gibt es eine Familie von endlichen Gruppen $(F_i)_{i\in I}$ und einen injektiven stetigen Morphismus $G \to \prod_{i\in I} F_i$, d.h. G ist als topologische Gruppe isomorph zu einer Untergruppe eines Produktes von endlichen Gruppen.

<u>Beweis</u> Sei $I = \{ N \trianglelefteq G \mid N \leq G \text{ offen} \}$. Für $N \in I$ sei $F_N = G/N \leadsto F_N$ endlich, $f_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ Morphismus von top. Gruppen. Setze $f : G \to \prod_{N\in I} F_N$, $g \mapsto (gN)_{N\in I}$.

Dann ist f ein Morphismus, weil G kompakt ist, ist f abg. und f ist injektiv nach

§ 2.8 (ii): $g \in G - \{e\} \Rightarrow \exists N \in I$ $g \notin N$ $\square$

$f_N(g) \neq N$

Jetzt konstruieren wir das Haar-Integral.

11. **Def** Ist X ein top. Raum und $\varphi: X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist der Träger von φ die Menge
$\mathrm{supp}(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})} = \{x \in X \mid$ in jeder Umgebung von x gibt es ein $y \in X$ mit $\varphi(y) \neq 0\}$. Wir sagen, φ hat kompakten Träger wenn $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt ist. Sei $C_c(X) = \{\varphi: X \to \mathbb{R} \mid \varphi$ stetig, $\mathrm{supp}(\varphi)$ kompakt$\}$. Dann ist $C_c(X)$ ein reeller Vektorraum. Jedes $\varphi \in C_c(X)$ ist beschränkt, wir setzen $|\varphi|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| \mid x \in X\}$ (Supremumsnorm).
Ist $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für jedes $x \in X$ so schreiben $\varphi \leq \psi$.
Es sei $C_c^+(X) = \{\varphi \in C_c(X) \mid 0 \leq \varphi\}$. Jedes $\varphi \in C_c(X)$ ist von der Form $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^+(X)$, etwa $\varphi_1 = \max\{0, \varphi\}$ $\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi$

Lemma Sei X lokal kompakt und sei $G \subseteq X$ kompakt. Dann existiert $\varphi: X \to [0,1]$ stetig und mit kompaktem Träger mit $\varphi(G) = \{1\}$.

Bew: Für jedes $c \in G$ wähle eine offene Umgebung $U_c \subseteq X$ von c, die kompakten Abschluss $\overline{U}_c$ hat.

Da G' kompakt ist, gibt es $c_1, \dots, c_m \in G'$ mit $G' \subseteq U_{c_1} \cup \dots \cup U_{c_m} = U$ und U ist offen mit kompaktem Abschluss $\bar{U}$. Da $\bar{U}$ normal ist, gibt es nach Urysohns Lemma $\eta : \bar{U} \to [0,1]$ stetig mit $\eta(\bar{U} - U) \subseteq \{0\}$, $\eta(G') \subseteq \{1\}$.
Setze $\eta(x) = 0$ für alle $x \in X - U$, so ist η stetig auf ganz X und $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U$. $\square$

12. <u>Lemma</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe, sei $\varphi \in C_c(G)$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es eine (symmetrische) Einsumgebung V so, dass für alle $g^{-1}h \in V$

$$|\varphi(g) - \varphi(h)| < \varepsilon \quad \text{gilt}$$

(d.h. φ ist <u>gleichmäßig stetig</u>)

<u>Beweis</u> Wir wählen für jedes $a \in G$ eine Einsumgebung W_a so, dass $|\varphi(a) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in aW_a$ gilt (Stetigkeit von φ).
Sei U_a eine Einsumgebung mit $U_a U_a \subseteq W_a$ (Stetigkeit der Multiplikation).
Sei $G' = \operatorname{supp}(\varphi)$, so gibt es $a_1, \dots, a_m \in G$ mit $G' \subseteq a_1 U_{a_1} \cup \dots \cup a_m U_{a_m}$

Sei $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_m}$, sei $V \subseteq G$ eine symmetrische Einsumgebung mit $V^{-1}V \subseteq U$. Angenommen, $g^{-1}h \in V$, d.h. $h \in gV$. Falls für alle $k = 1, \ldots, m$ gilt $gV \cap a_k U_{a_k} = \phi$, so ist $\varphi(g) = \varphi(h) = 0$ (v)

Falls $gV \cap a_k U_{a_k} \neq \phi$, so $g \in a_k U_{a_k} V^{-1}$

$\leadsto gV \subseteq a_k U_{a_k} V^{-1} V \subseteq a_k U_{a_k} U_{a_k} \subseteq a_k W_{a_k}$

$$\leadsto \left.\begin{aligned} |\varphi(g) - \varphi(a_k)| &< \tfrac{\varepsilon}{2} \\ |\varphi(h) - \varphi(a_k)| &< \tfrac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \leadsto |\varphi(g) - \varphi(h)| < \varepsilon$$

$\square$

13. Der Gruppenring. Sei R ein (kommutativer) Ring, sei G eine Gruppe (ohne Topologie). Sei $R[G]$ der freie R-Modul mit Basis G. Die Elemente von $R[G]$ sind also formale Linearkombinationen $c = \sum_{g \in G} c_g g$, $c_g \in R$, fast alle $c_g = 0$. Die Multiplikation $G \times G \to G$ macht $R[G]$ zu einer assoziativen R-Algebra

$$c \cdot d = \Big(\sum_{g \in G} c_g g\Big)\Big(\sum_{h \in G} d_h h\Big) = \sum_{a \in G} \sum_{g \in G} c_g h_{g^{-1}a}\, a$$

Ist M ein R-Modul, auf dem G R-linear wirkt, so ist M auch ein $R[G]$-Modul.

Die Augmentierungsabbildung

$$\epsilon: R[G] \longrightarrow R$$
$$\sum_{g\in G} c_g g \longmapsto \sum_{g\in G} c_g$$

ist ein Ringhomomorphismus.

14. <u>Beobachtung</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann wirkt G von links $\mathbb{R}$-linear auf $C_c(G)$ durch $a\varphi := \varphi\circ\lambda_{a^{-1}}$, d.h.

$$(a\varphi)(x) = \varphi(a^{-1}x)$$, denn

$$(ba)\varphi = \varphi\circ\lambda_{(ba)^{-1}} = \varphi\circ\lambda_{a^{-1}b^{-1}} = \varphi\circ\lambda_{a^{-1}}\circ\lambda_{b^{-1}} = (a\varphi)\circ\lambda_{b^{-1}}$$

$= b(a\varphi)$. Damit ist $C_c(G)$ ein $\mathbb{R}[G]$-Modul durch $c = \sum_{g\in G} c_g g$

$$(c\varphi)(x) = \underbrace{\sum_{g\in G} c_g\cdot\varphi(g^{-1}x)}_{\substack{\text{endliche Summe, da}\\ \text{fast alle } c_g = 0 \text{ sind.}}}$$

#

15. <u>Definition</u> Ein lineares Funktional

$I : C_c(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ (eine lin. Abbildung) heißt

<u>invariantes Integral</u> auf G oder <u>Haar-Integral</u>,

wenn gilt: (i) ist $\varphi \in C_c^+(G)$, so ist $I(\varphi) \geq 0$

(ii) ist $g \in G$ und $\varphi \in C_c(G)$, so gilt

$$I(g\varphi) = I(\varphi)$$

(iii) es gibt ein $\varphi \in C_c^+(G)$ mit $I(\varphi) \neq 0$.

<u>Klar</u>: falls I ein invariantes Integral ist und falls $s > 0$ ist, so ist auch $sI : C_c(G) \to \mathbb{R}$ ein invariantes Integral.

<u>Beispiel</u> Sei G eine beliebige Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie. Dann sind die kompakten Mengen in G genau die endlichen Mengen in G und $C_c(G) \cong \mathbb{R}[G]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum,

$$c = \sum_{g \in G} c_g g \longmapsto [\, x \mapsto c_x \,] \in C_c(G)$$

und die Augmentationsabbildung

$$\epsilon : \sum_{g \in G} c_g g \longmapsto \sum_{g \in G} c_g$$

ist ein invariantes Integral.

Wir zeigen nun die Existenz eines Haar-Integrals.

Sei $\mathbb{R}[G]^+ = \{ \sum_{g\in G} c_g g \in \mathbb{R}[G] \mid c_g \geq 0$ für alle $g \in G\}$

Klar: $\mathbb{R}[G]^+$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation und Addition.

16. Lemma Sei G eine lokal kompakte Gruppe und seien $\varphi, \alpha \in C_c^+(G)$ mit $\alpha \neq 0$. Dann existiert ein $a \in \mathbb{R}[G]^+$ so, dass

$$\varphi \leq a\alpha$$

Beweis Sei $s = |\varphi|_\infty$, $t = |\alpha|_\infty > 0$ und sei $U = \{x \in G \mid \alpha(x) > \frac{t}{2}\} \neq \emptyset$. Da $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt ist, gibt es $g_1, \dots, g_m \in G$ mit

$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq g_1 U \cup \dots \cup g_m U$. Für $x \in g_k U$

$g_k^{-1}x \in U$

gilt $(g_k \alpha)(x) = \alpha(g_k^{-1}x) > \frac{t}{2}$,

also mit $a = \frac{2s}{t}(g_1 + \dots + g_m) \in \mathbb{R}[G]^+$

$\rightsquigarrow \varphi \leq a\alpha$ $\square$

Wir definieren für $\varphi, \alpha \in C_c(G)^+$ und $\alpha \neq 0$ die Zahl

$$(\varphi : \alpha) = \inf \{ \varepsilon(a) \mid a \in C_c(G)^+ , \varphi \leq a\alpha \}$$

$$= \inf \Big\{ \sum_{g \in G} a_g \;\Big|\; \sum_{g \in G} a_g g \in C_c(G)^+ , \text{ für alle } x \in G \quad \varphi(x) \leq \sum_{g \in G} a_g \, \alpha(g^{-1}x) \Big\}$$

Nach dem vorigen Lemma ist diese Zahl endlich und nicht negativ.

17. <u>Lemma A</u> Sei G lokal kompakte Gruppe, sei $\varphi, \psi, \alpha, \beta \in C_c^+(G)$ mit $\alpha \neq 0 \neq \beta$. Dann gilt

(i) $(a\varphi : \alpha) = (\varphi : \alpha) = (\varphi : a\alpha)$ für alle $a \in G$

(ii) $(s\varphi : \alpha) = s(\varphi : \alpha)$ für alle $s \geq 0$

(iii) $\varphi \leq \psi \Rightarrow (\varphi : \alpha) \leq (\psi : \alpha)$

(iv) $(\varphi + \psi : \alpha) \leq (\varphi : \alpha) + (\psi : \alpha)$

(v) $(\varphi : \beta) \leq (\varphi : \alpha) \cdot (\alpha : \beta)$

(vi) $|\varphi|_\infty \leq (\varphi : \alpha) |\alpha|_\infty$

<u>Beweis</u> (i) – (iv) folgen direkt aus der Definition,

weil für $a, b \in \mathbb{R}[G]^+$ gilt:

$$\varphi \leq a\alpha \Rightarrow b\varphi \leq ba\alpha$$

Zu (v). Angenommen, $a, b \in \mathbb{R}[G]^+$ mit $\varphi \leq a\alpha$ und $\alpha \leq b\beta$. Es folgt $\varphi \leq ab\beta$ und damit $(\varphi : \beta) \leq \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b)$.

Zu (vi). Angenommen, $a \in \mathbb{R}[G]^+$ mit $\varphi \leq a\alpha$.

Dann $\varphi(x) \leq \sum_{g \in G} a_g \alpha(g^{-1}x) \leq \sum_{g \in G} a_g |\alpha|_\infty = \epsilon(a)|\alpha|_\infty$ $\square$

#

<u>Lemma B</u> Sei G eine lokalkompakte Gruppe, sei $\varphi, \psi \in C_c^+(G)$. Dann existiert $\eta \in C_c^+(G)$ so, dass Folgendes gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Einsumgebung V so, dass für alle $\alpha \in C_c^+(G) - \{0\}$ mit $\mathrm{supp}(\alpha) \subseteq V$ gilt

$$(\varphi : \alpha) + (\psi : \alpha) \leq (\varphi + \psi : \alpha)(1+\varepsilon) + \varepsilon(1+\varepsilon)(\eta : \alpha)$$

<u>Beweis</u> Sei $C = \mathrm{supp}(\varphi) \cup \mathrm{supp}(\psi)$, sei $\eta : G \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger so, dass $\eta(C) \subseteq \{1\}$, vgl. 2.11. Wir definieren $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in C_c^+(G)$ wie folgt.

$$\hat{\varphi}(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in G \text{ mit } \varphi(x) = 0$$

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) + \varepsilon\eta(x)} \quad \text{für alle } x \in \mathrm{supp}(\varphi)$$

Da $\eta(x) = 1$ für alle $x \in \mathrm{supp}(\varphi)$, ist die rechte Seite definiert und $\hat{\varphi}$ ist stetig. Definiere $\hat{\psi}$ analog,

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} 0 & \psi(x) = 0 \\ \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) + \varepsilon\eta(x)} & x \in \mathrm{supp}(\psi) \end{cases}$$

Es folgt $\hat{\varphi} + \hat{\psi} \leq 1$. Wir setzen im folgenden $\xi = \varphi + \psi + \varepsilon\eta$. Wir wählen $\delta > 0$ so, dass gilt $6 \cdot \delta \, |\xi|_\infty < \varepsilon^3$ und $2 \cdot \delta < \varepsilon^2$ und dann eine symmetrische Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass für alle $x, y \in G$ mit $x^{-1}y \in V$ gilt

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|, \; |\psi(x) - \psi(y)| < \delta \qquad \text{vgl. 2.12.}$$

Es folgt dann für $x^{-1}y \in V$ und $x, y \in \operatorname{supp}(\varphi)$, dass

$$|\hat{\varphi}(x) - \hat{\varphi}(y)| = \left| \frac{\varphi(x)}{\xi(x)} - \frac{\varphi(y)}{\xi(y)} \right| = \left| \frac{1}{\xi(x)\xi(y)} \right| \cdot |\varphi(x)\xi(y) - \varphi(y)\xi(x)|$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(|\varphi(x)\xi(y) - \varphi(y)\xi(y)| + |\varphi(y)\xi(y) - \varphi(y)\xi(x)| \right)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\delta |\xi|_\infty + |\varphi|_\infty \, 2 \cdot \delta \right) = \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left(|\xi|_\infty + |\varphi|_\infty \cdot 2 \right)$$

$$\leq \frac{\delta}{\varepsilon^2} \left(3 |\xi|_\infty \right) < \varepsilon/2. \quad \left(\text{Ist } \begin{array}{l} \varphi(x) = 0, \\ \varphi(y) \neq 0 \end{array} \text{ so } |\hat{\varphi}(y)| \leq \tfrac{1}{\varepsilon} \delta < \varepsilon/2. \right)$$

Ist $a \in \mathbb{R}[G]^+$ mit $\xi \leq a\alpha$, so folgt

$$\varphi = \hat{\varphi} \cdot \xi \leq \hat{\varphi} \cdot (a\alpha), \text{ also}$$

$$\varphi(x) \leq \sum_{g \in G} a_g \, \alpha(g^{-1}x) \, \hat{\varphi}(x) \leq \sum_{g \in G} a_g \left(\hat{\varphi}(g) + \tfrac{\varepsilon}{2} \right) \alpha(g^{-1}x)$$

genauso $\psi(x) \leq \sum_{g \in G} a_g \left(\hat{\psi}(g) + \tfrac{\varepsilon}{2} \right) \alpha(g^{-1}x)$

insgesamt wegen $\hat{\varphi} + \hat{\psi} \leq 1$ also

$$(\varphi:\alpha)+(\psi:\alpha) \le \sum a_g(1+\varepsilon)$$ und damit

$$(\varphi:\alpha)+(\psi:\alpha) \le (1+\varepsilon)(\xi:\alpha) = (1+\varepsilon)(\varphi+\psi+\varepsilon\eta:\alpha)$$
$$\le (1+\varepsilon)(\varphi+\psi:\alpha)+\varepsilon(1+\varepsilon)(\eta:\alpha) \qquad \square$$

18. <u>Konstruktion</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Wir wählen $\varphi_0 \in C_c^+(G)-\{0\}$. Für $\varphi, \alpha \in C_c^+(G)$ mit $\alpha \neq 0$ setzen wir

$$I(\varphi,\alpha) = \frac{(\varphi:\alpha)}{(\varphi_0:\alpha)}$$

(nach §2.17 A (vi) ist $(\varphi_0:\alpha)>0$)

Dann gilt
$$I(\varphi,\alpha) \le (\varphi:\varphi_0)$$
$$\frac{1}{(\varphi_0:\varphi)} \le I(\varphi,\alpha)$$
$$I(g\varphi,\alpha) = I(\varphi,\alpha) \qquad g\in G$$
$$I(s\varphi,\alpha) = sI(\varphi,\alpha) \qquad s\ge 0$$
$$I(\varphi+\psi,\alpha) \le I(\varphi,\alpha)+I(\psi,\alpha)$$
$$\psi\in C_c^+(G)$$

(nach §2.17 Lemma A)

Sei nun $P = C_c^+(G)-\{0\}$ und Q der kompakte Würfel

$$Q = \prod_{\varphi\in P}\left[\frac{1}{(\varphi_0:\varphi)}, (\varphi:\varphi_0)\right]$$

Die Elemente von Q sind also (gewisse) Abbildungen $P \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Ist $V \subseteq G$ eine symmetrische Einsumgebung, so sei $Q_V = \{ (I(\varphi,\alpha))_{\varphi \in P} \mid \alpha \in P,\ \operatorname{supp}(\alpha) \subseteq V \}$

Ist $W \subseteq V$, so $Q_W \subseteq Q_V$, also hat die Familie

$\{ \overline{Q_V} \mid V \subseteq G$ symmetrische Einsumgebung $\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft. Deswegen existiert ein Element

$$I \in \bigcap \{ \overline{Q_V} \mid V \subseteq G \text{ sym. Einsumgebung} \}$$

19. Theorem (Existenz eines invarianten Integrals)

Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann existiert auf G ein invariantes Integral.

Beweis Sei $I : P \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wie in §2.18 definiert. Für jedes $\alpha \in P$, $s > 0$, $g \in G$ gilt

$$s\,I(\varphi,\alpha) = I(s\varphi,\alpha) \Rightarrow s\,I(\varphi) = I(s\varphi)$$

$$I(g\varphi,\alpha) = I(\varphi,\alpha) \Rightarrow I(g\varphi) = I(\varphi)$$

$$I(\varphi+\psi,\alpha) \leq I(\varphi,\alpha) + I(\psi,\alpha) \Rightarrow I(\varphi+\psi) \leq I(\varphi) + I(\psi)$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine sym. Einsumgebung

$V \subseteq G$ so, dass für die Elemente $I(\varphi,x) \in P_V$, $I(\psi,x) \in P_V$

gilt

$$I(\varphi,x) + I(\psi,x) \leq (1+\varepsilon) I(\varphi+\psi,x) + \varepsilon(1+\varepsilon)\frac{(\eta:x)}{(\varphi_0:x)}$$

$$\leq (1+\varepsilon) I(\varphi+\psi,x) + \varepsilon(1+\varepsilon)\underbrace{(\eta:\varphi_0)}_{\text{Konstante, unabhängig von } \varepsilon}$$

Es folgt $I(\varphi)+I(\psi) \leq (1+\varepsilon) I(\varphi+\psi) + \varepsilon(1+\varepsilon)(\eta:\varphi_0)$

für alle $\varepsilon > 0 \Rightarrow I(\varphi)+I(\psi) \leq I(\varphi+\psi)$, also

$I(\varphi)+I(\psi) = I(\varphi+\psi)$.

Für $\varphi = 0$ setzen wir $I(\varphi) = 0$. Jedes

$\varphi \in C_c(G)$ läßt sich schreiben als

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^+(G)$, setze

$I(\varphi) = I(\varphi_1) - I(\varphi_2)$. Das ist wohl definiert:

angenommen, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_4$, $\varphi_1, \dots, \varphi_4 \in C_c^+(G)$

$\Rightarrow \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_3 + \varphi_2 \Rightarrow I(\varphi_1) + I(\varphi_4) = I(\varphi_3) + I(\varphi_2)$

$\Rightarrow I(\varphi_1) - I(\varphi_2) = I(\varphi_3) - I(\varphi_4)$.

Es folgt für $s \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in C_c(G)$, dass

$$\left.\begin{array}{l} I(s\varphi) = s\, I(\varphi) \\ I(\varphi+\psi) = I(\varphi) + I(\psi) \end{array}\right\} \text{Zerlegen wie oben.}$$

Schließlich gilt $I(\varphi_0,\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in P \Rightarrow I(\varphi_0) = 1$. Damit ist I ein invariantes Integral. $\square$

20. <u>Lemma</u> Sei I ein invariantes Integral auf der lokalkompakten Gruppe G. Sei $\varphi, \alpha \in C_c^+(G)$ mit $\alpha \neq 0$. Dann gilt

$$I(\varphi) \leq (\varphi : \alpha)\, I(\alpha)$$

und insbesondere gilt $I(\alpha) \neq 0$.

<u>Bew.</u> Sei $a \in \mathbb{R}[G]^+$ mit $\varphi \leq a\alpha$, vgl. § 2.16. Es folgt wegen $\varphi \leq \sum_{g\in G} a_g\, \alpha \circ \lambda_{g^{-1}}$, dass

$$I(\varphi) \leq \sum_{g\in G} a_g\, I(\alpha) = \varepsilon(a)\, I(\alpha), \text{ also auch}$$

$$I(\varphi) \leq (\varphi:\alpha)\, I(\alpha).$$

Da es nach Voraussetzung ein $\varphi \in C_c^+(G)$ gibt mit $I(\varphi) > 0$, folgt insbesondere $I(\alpha) > 0$ $\square$

21. <u>Theorem</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Seien I, J invariante Integrale auf G. Dann gibt es ein $s > 0$ mit $J = s \cdot I$.

<u>Beweis</u> Für $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^+(G) - \{0\}$ gilt nach dem vorigen Lemma §2.20, dass $I(\varphi_j), J(\varphi_j) > 0$, $j = 1,2$.

Es genügt zu zeigen:

$$\frac{I(\varphi_1)}{I(\varphi_2)} = \frac{J(\varphi_1)}{J(\varphi_2)} \quad \text{gilt für } \underline{\text{alle}}\ \varphi_1, \varphi_2 \in C_c^+(G) - \{0\}.$$

Denn dann folgt mit $s = \dfrac{J(\varphi_1)}{I(\varphi_1)}$, dass $J(\varphi_2) = s I(\varphi_2)$ für alle $\varphi_2 \in C_c^+(G) - \{0\}$ und damit $J = sI$.

#

<u>Behauptung</u> Für $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^+(G) - \{0\}$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\alpha \in C_c^+(G) - \{0\}$ s.d., dass

$$(1-\varepsilon)(\varphi_j : \alpha)\, J(\alpha) \leq J(\varphi_j) \qquad j = 1,2$$

für alle invarianten Integrale J gilt.

Aus der Behauptung folgt das Theorem:

Wir $J(\varphi_2) \leq (\varphi_2 : \alpha)\, J(\alpha)$ (vgl. §2.20)

Folgt jedenfalls

$$(1-\varepsilon)\frac{(\varphi_1:\alpha)}{(\varphi_2:\alpha)} \le \frac{1}{(\varphi_2:\alpha)}\,\frac{J(\varphi_1)}{J(\alpha)} \le \frac{J(\varphi_1)}{J(\varphi_2)}$$

und die gleiche Ungleichung mit φ_1 und φ_2 vertauscht,

$$(1-\varepsilon)\frac{(\varphi_2:\alpha)}{(\varphi_1:\alpha)} \le \frac{J(\varphi_2)}{J(\varphi_1)} \rightsquigarrow \frac{1}{(1-\varepsilon)}\,\frac{(\varphi_1:\alpha)}{(\varphi_2:\alpha)} \ge \frac{J(\varphi_1)}{J(\varphi_2)}$$

Insgesamt also

$$(1-\varepsilon)\frac{(\varphi_1:\alpha)}{(\varphi_2:\alpha)} \le \frac{J(\varphi_1)}{J(\varphi_2)} \le \frac{1}{(1-\varepsilon)}\,\frac{(\varphi_1:\alpha)}{(\varphi_2:\alpha)}.$$

Das gilt auch für I, also

$$\frac{I(\varphi_1)}{I(\varphi_2)} \le \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\,\frac{J(\varphi_1)}{J(\varphi_2)} \overset{\varepsilon\to 0}{\rightsquigarrow} \frac{I(\varphi_1)}{I(\varphi_2)} \le \frac{J(\varphi_1)}{J(\varphi_2)}$$

umgekehrt genauso, das Theorem folgt.

Wir müssen die Behauptung noch beweisen.

Beweis der Ungleichung $(1-\varepsilon)(\varphi_j:\alpha)\,J(\alpha) \le J(\varphi_j)$ $\quad j=1,2$

Sei $G' = \mathrm{supp}(\varphi_1)\cup \mathrm{supp}(\varphi_2)$, sei $\eta: G \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger und $\eta(G')\subseteq\{1\}$, vgl. §2.11.

Wir wählen $\delta>0$ so, dass $\varepsilon > 2\cdot\delta\cdot(\eta:\varphi_j)$ $\quad j=1,2$.

Sei $V\subseteq G$ eine symmetrische Einsumgebung so, dass

$|\varphi_j(x)-\varphi_j(y)|<\delta$ gilt für alle x,y mit $x^{-1}y\in V$.

Sei $\beta\in C_c^+(G)-\{0\}$ mit $\mathrm{supp}(\beta)\subseteq V$ und

sei $\alpha(x)=\beta(x)+\beta(x^{-1}) \rightsquigarrow \mathrm{supp}(\alpha)\subseteq V$ und $\alpha(x)=\alpha(x^{-1})$. Jetzt zeigen wir die Ungleichung.

Wähle $t>0$ so, dass $t\,J(\varphi_j) < s\,J(\alpha)$ gilt.
Sei $W \subseteq G$ (offene) symm. Einsumgebung mit $\overline{W}$ kompakt und so, dass $|\alpha(x)-\alpha(y)|< t$ für alle $x,y\in G$ mit $x^{-1}y \in W$. Da G' kompakt ist, gibt es $g_1,\dots,g_m \in G$ mit $G' \subseteq g_1 W \cup \dots \cup g_m W$. Sei $U_k = g_k W$ und $U_0 = G - G'$ $\leadsto$ $U_0,\dots,U_m$ offene Überdeckung von G.
Da G lokal kompakt ist, gibt es eine Zerlegung der Eins, $\psi_k : G \to [0,1]$ stetig, $\operatorname{supp}(\psi_k) \subseteq U_k$ und

$\sum_{k=0}^{m} \psi_k = 1$, vgl. GAT. Für $x\in G'$ folgt

$\sum_{k=1}^{m} \psi_k(x) = 1$ und $\psi_1,\dots,\psi_m \in C_c^+(G)$. Also

(1) $$\varphi_j = \sum_{k=1}^{m} \psi_k \cdot \varphi_j \qquad j=1,2$$

Für $y \in xV$ ist $\varphi_j(x) - s \le \varphi_j(y)$, folglich

$(\varphi_j(x)-s)\cdot(x\alpha) \le \varphi_j \cdot (x\alpha)$. Integration ergibt

(2) $$(\varphi_j(x)-s)\,J(\alpha) \le J(\varphi_j\cdot(x\alpha)).$$

Für $y \in g_k W$ ist $g_k^{-1}y = (g_k^{-1}x)(x^{-1}y) \in W$, also

$\alpha(x^{-1}y) = \alpha(y^{-1}x) \le \alpha(g_k^{-1}x) + t$. Damit

$\psi_k \cdot (x\alpha) \le \psi_k \cdot (g_k\alpha)(x) + t$. Multipliziere mit

φ_j und integrieren, summieren über k

$$(3)\quad J\Big(\sum_{k=1}^{m} \varphi_j \cdot \psi_k \cdot (x\alpha)\Big) = J(\varphi_j \cdot (x\alpha))$$

$$\leq J\Big(\sum_{k=1}^{m} \varphi_j \cdot \psi_k \cdot (g_k\alpha)(x)\Big) + t \cdot J(\varphi_j)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} J(\varphi_j \cdot \psi_k)(g_k\alpha)(x) + s\, J(\alpha)$$

Insgesamt mit (1), (2), (3)

$$(\varphi_j(x) - s)\, J(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{m} J(\varphi_j \cdot \psi_k)(g_k\alpha)(x) + s \cdot J(\alpha)$$

Sei $\varphi_j' = \max\{0, \varphi_j - 2 \cdot s\} \in C_c^+(G)$. Es folgt

$$\varphi_j'(x) \cdot J(\alpha) \leq \Big(\sum_{k=1}^{m} J(\varphi_j \cdot \psi_k)\, g_k \alpha\Big)(x)$$

$$\Rightarrow (\varphi_j' : \alpha)\, J(\alpha) \leq \sum_{k=1}^{m} J(\varphi_j \cdot \psi_k) = J(\varphi_j) \leq (\varphi_j : \alpha) J(\alpha)$$

Lemma § 2.20

Da $\varphi_j \leq \varphi_j' + 2s\eta$ erhalten wir

$$(\varphi_j : \alpha) \leq (\varphi_j' + 2s\eta : \alpha) \leq (\varphi_j' : \alpha) + 2s(\eta : \alpha)$$

$$\leq (\varphi_j' : \alpha) + 2s(\eta : \varphi_j)(\varphi_j : \alpha)$$

$$\leq (\varphi_j' : \alpha) + \varepsilon\, (\varphi_j : \alpha)$$

$$\Rightarrow (\varphi_j : \alpha)(1 - \varepsilon)\, J(\alpha) \leq J(\varphi_j) \qquad \square$$

Auf einer lokal kompakt Gruppe G gibt es also ein bis auf eine positive reelle Zahl eindeutig bestimmtes invariantes Integral I.
Wir schreiben ab jetzt für $\varphi \in C_c(G)$

$$I(\varphi) = \int_G \varphi = \int_G \varphi(x)\,dx$$

und nennen $\int_G$ das <u>Haar-Integral</u> auf G.

Falls G kompakt ist, ist $C_c(G) = C(G) = \{\varphi : G \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ stetig}\}$. Dann gibt es genau ein Haar-Integral mit $\int_G 1 = 1$, das

<u>normierte Haar-Integral</u>.

22. <u>Definition</u> Sei G eine lokal kompakte Gruppe mit Haar-Integral $\int_G$. Für $g \in G$, $\varphi \in C_c(G)$ betrachte

$$J_g(\varphi) = \int_G (\varphi \circ \varrho_{g^{-1}}) \qquad (\varrho_g(x) = xg)$$

Es folgt wegen $\varrho_{g^{-1}} \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}} \circ \varrho_{g^{-1}}$, dass

$$J_g(\varphi \circ \lambda_{a^{-1}}) = \int_G (\varphi \circ \lambda_{a^{-1}}) \circ \varrho_{g^{-1}} = \int_G \varphi \circ \varrho_{g^{-1}} \circ \lambda_{a^{-1}} = \int_G \varphi \circ \varrho_{g^{-1}}$$
$$= J_g(\varphi)$$

dass J_g ein invariantes Integral ist. Also gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $s \cdot \int_G = J_g$. Wir definieren den <u>Modulus von g</u> als

$$\mathrm{mod}(g) = s$$

<u>Theorem</u> Die Zahl $\mathrm{mod}(g)$ ist unabhängig vom gewählten Haar-Integral und die modulare Funktion

$$\mathrm{mod}: G \to \mathbb{R}^* \qquad (\mathrm{mod} > 0!)$$

ist ein Morphismus von topologischen Gruppen.

<u>Beweis</u> Ist $I = t \cdot \int_G$ für ein $t > 0$, so folgt

$$I(\varphi \circ \rho_g) = t \cdot \int_G \varphi \circ \rho_{g^{-1}} = \frac{1}{s} t \int_G \varphi = \frac{1}{s} I(\varphi)$$

also ist $\mathrm{mod}(g) = s$ unabhängig vom gewählten Integral. Weiter gilt für $g, h \in G$, dass

$$\int_G \varphi \circ \rho_{g^{-1}} \circ \rho_{h^{-1}} = \mathrm{mod}(h) \int_G \varphi \circ \rho_g = \mathrm{mod}(h)\,\mathrm{mod}(g) \int_G \varphi$$

$$\shortparallel$$

$$\int_G \varphi \circ \rho_{(hg)^{-1}} = \mathrm{mod}(hg)$$

, also ist mod ein Homomorphismus

#

Wir zeigen jetzt, dass mod im Einselement stetig ist, vgl. §1.5.

Wir wählen $\varphi \in C_c^+(G) - \{0\}$. Sei $C = \mathrm{supp}(\varphi)$ und sei $U \subseteq G$ eine offene Einsumgebung mit $\bar{U}$ kompakt. Da $C\bar{U}$ kompakt ist, gibt es $\eta \in C_c^+(G)$ mit $\eta(C\bar{u}) = \{1\}$.

Sei $\varepsilon > 0$ und sei $V \subseteq U$ eine offene symmetrische Einsumgebung so, dass für alle $x, y \in G$ mit $x^{-1}y \in V$ gilt $|\varphi(x) - \varphi(y)| \cdot \int_G \eta < \varepsilon \int_G \varphi$. Für $y \in G$, $x \in V$ folgt

(1) $$|\varphi(yx) - \varphi(y)| \cdot \int_G \eta < \varepsilon \cdot \eta(y) \cdot \int_G \varphi$$

denn: $$\left\{\begin{array}{l} y \in CU \Rightarrow \eta(y) = 1 \text{ und } y^{-1}(yx) = x \in V \\ y \notin CU \Rightarrow y \notin C \text{ und } y \notin Cx^{-1} \Rightarrow \varphi(y) = 0 = \varphi(yx) \end{array}\right\}$$

Integration über y liefert mit $\varphi(yx) = (\varphi \circ \rho_{x^{-1}})(y)$

$$\left| \int_G \varphi \circ \rho_{x^{-1}} - \int_G \varphi \right| \cdot \int_G \eta < \varepsilon \underbrace{\int_G \eta}_{\neq 0} \cdot \int_G \varphi$$

$$\underbrace{\left| \int_G \varphi \circ \rho_{x^{-1}} - \int_G \varphi \right|}_{= |\mathrm{mod}(x^{-1}) - 1| \cdot \int_G \varphi} < \varepsilon \int_G \varphi$$

$$\boxed{\int_G \varphi \circ \rho_{x^{-1}} = \mathrm{mod}(x) \int_G \varphi}$$

□

23. Def Eine lokal kompakte Gruppe G heißt <u>unimodular</u>, falls $\mathrm{mod}: G \to \mathbb{R}_{>0}$ der triviale Homomorphismus ist. Das gilt genau dann, wenn das Haar-Integral rechts invariant ist, d.h. wenn

$$\int_G \varphi \circ \rho_a = \int_G \varphi \qquad \text{für alle } a \in G,\ \varphi \in C_c(G).$$

Satz Die folgenden Gruppen sind unimodular:

(a) alle abelschen lokal kompakten Gruppen

(b) alle kompakten Gruppen

(c) alle lokal kompakten Gruppen G mit $\overline{[G,G]} = G$.

Bew. (a) Wenn G abelsch ist, so ist $\lambda_a = \rho_{a^{-1}}$

(b) Wenn G kompakt ist, so ist $\mathrm{mod}(G) \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ kompakte Untergruppe, also $\mathrm{mod}(G) = \{1\}$, denn jede nicht triviale Untergruppe von $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist unbeschränkt.

(c) Da $\mathbb{R}_{>0}$ abelsch ist, ist $\overline{[G,G]} \subseteq \ker(\mathrm{mod})$.

24 Beispiele (a) $G = (\mathbb{R}, +)$ Ist $\varphi \in C_c(G)$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subseteq [u,v]$

setze $\displaystyle\int_G \varphi = \int_u^v \varphi(t)\,dt$ ← Riemann-Integral

wegen $\displaystyle\int_{u+a}^{v+a} \varphi(t-a)\,dt = \int_u^v \varphi(t)\,dt$ ist das G abelsch, also unimodular.

Integral invariant.

(b) G <u>diskret</u> Gruppe $\Rightarrow$ $C_c(G) \cong \mathbb{R}[G]$

via $a = \sum_{g \in G} a_g \cdot g \mapsto [x \mapsto a_x]$,

$$\int_G a = \epsilon(a) = \sum_{g \in G} a_g = \int_G ag \quad \text{für } g \in G$$

$\Rightarrow$ G ist unimodular.

(c) $G = (\mathbb{R}^m, +)$ λ Lebesgue-Maß

$\int_G \varphi = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(v)\, d\lambda(v)$ Lebesgue-Integral

Da λ translationsinvariant ist, $\lambda(E - v) = \lambda(E)$ für $E \subseteq \mathbb{R}^m$ Borelmenge, $v \in \mathbb{R}^m$, folgt

$$\int_G \varphi(x-v)\,dx = \int_G \varphi(x)\,dx$$

G ist abelsch, also unimodular

(d) $G = GL_n \mathbb{R} \underset{\text{offen + dicht}}{\subseteq} \mathbb{R}^{n \times n}$, λ Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n \times n}$. Für $\varphi \in C_c(G)$ gilt:

$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ kompakt. Es gibt $A \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ abg. mit $\varphi^{-1}(0) = A \cap G$ und

$\mathbb{R}^{n \times n} = A \cup \operatorname{supp}(\varphi)$ (weil dicht)

Setze $\varphi(a) = 0$ für $a \in A$ zu stetiger Fortsetzung damit injektive Abbildung

$$C_c(G) \longleftrightarrow C_c(\mathbb{R}^{n\times n})$$

Ansatz

$$\int_G \varphi = \int_G \varphi(v)\, g(v)\, d\mu(v) \qquad \text{Lebesgue-Integral}$$

$g: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ stetig

Transformationsformel für Lebesgue-Integral:

$F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ Diffeomorphismus $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(v)\, d\mu(v) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi \circ F(w)\, |\det DF(w)|\, d\mu(w)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{n\times n}} \varphi(a^{-1}w)\, g(a^{-1}w)\, |\det(a^{-1})^n|\, d\mu(w)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n\times n}} \varphi(v)\, g(v)\, d\mu(v) \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^{n\times n}} \varphi(a^{-1}v)\, g(v)\, d\mu(v)$$

Setze also $g(v) = |\det(v)|^{-n}$

$$\Rightarrow g(a^{-1}w) \cdot |\det(a^{-1})^n|$$

$$= |\det(a)^n \cdot g(w) \cdot \det(a^{-1})^n| = g(w) \quad \text{, d.h.}$$

$$\int_G \varphi = \int_{\mathbb{R}^{n\times n}} \varphi(v)\, |\det(v)|^{-n}\, d\mu(v)$$

Die Gruppe G ist unimodular (!) $\boxed{\text{ÜA}}$

(e) $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0,\ b \in \mathbb{R} \right\} \leq GL_2\mathbb{R}$ 68

ist <u>nicht</u> unimodular (ÜA)