§1 Grundlagen zu topologischen Gruppen

In diesem Kapitel erlauben wir topologische Räume, die nicht unbedingt Hausdorffsch sind.

1. **Def** Eine *topologische Gruppe* $(G, \cdot, \mathcal{T})$ besteht aus einer Gruppe $(G, \cdot)$ sowie einer Topologie $\mathcal{T}$ auf der Menge G so, dass die Abbildung

$$q : G \times G \longrightarrow G, \quad (g,h) \longmapsto g^{-1}h$$

stetig ist. Es folgt (setze $h=e$), dass die Abbildung $i: G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ und die Abbildung $m: G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto gh$ stetig sind. Für jedes $a \in G$ sind die Abbildungen

$$\rho_a : G \to G, \quad g \mapsto ga^{-1}$$
$$\lambda_a : G \to G \quad g \mapsto ag$$
$$r_a : G \to G \quad g \mapsto aga^{-1}$$

Homöomorphismen, mit Inversen $\rho_{a^{-1}}$, $\lambda_{a^{-1}}$, $r_{a^{-1}}$.

Insbesondere ist G homogen, die Homöomorphismengruppe von $(G, \mathcal{J})$ wirkt transitiv auf G.

Ist W eine Umgebung von $g \in G$, so gibt es Einsumgebungen (Umgebungen von $e \in G$) V, U mit

$W = gU = Vg$, nämlich $U = g^{-1}W$, $V = Wg^{-1}$.

Seien G, K topologische Gruppen. Ein Morphismus $f : G \to K$ ist ein Gruppenhomomorphismus, der stetig ist.

2. Beispiele (a) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$

$(\mathbb{C}, +)$ $(\mathbb{C}^*, \cdot)$

$(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

sind topologische Gruppen bezüglich der "üblichen" Topologien auf $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*, \quad t \mapsto \exp(t)$$
$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto \exp(z)$$

sind Morphismen

(b) Variante: die <u>Kreisgruppe</u> $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist bzgl der Multiplikation eine topologische Gruppe und $f: \mathbb{R} \to U(1)$, $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ist ein Morphismus

(c) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Morphismus. Dann gibt es genau ein $r \in \mathbb{R}$ so, dass $f(t) = rt$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt! (betrachte die dichte Untergruppe $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\to$ ÜA)

(d) Sei $f: U(1) \to U(1)$ ein Morphismus. Dann gibt es genau ein $n \in \mathbb{Z}$ so, dass $f(z) = z^n$ für alle $z \in U(1)$ gilt (ÜA)

(e) $(\mathbb{R},+)$ ist ein unendlich dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum, Folglich hat die Gruppe $(\mathbb{R},+)$ $2^{2^{\aleph_0}}$ Automorphismen. Mit (c) folgt: "fast alle" Automorphismen von $(\mathbb{R},+)$ sind unstetig

(f) $H = (\mathbb{R},+)$ mit der <u>diskreten</u> Topologie. Dann ist $id: H \to \mathbb{R}$ ein stetiger bijektiver Homomorphismus (also ein bijektiver Morphismus), der <u>kein</u> stetiges Inverses hat.

(g) Sei F ein topologischer Körper (Multiplikation stetig, $(F^*,\cdot)$ und $(F,+)$ sind topologische Gruppen), etwa $F=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$.
Betrachte $GL_n(F) \subseteq F^{n\times n}$ mit der Teilraumtopologie.
Dann ist $GL_n(F)$ eine topologische Gruppe. Denn:

$$g \in F^{n\times n} \rightsquigarrow g^{\#} = (a_{ij})_{i,j}$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(\;\;\right)_j$$

Strich in g i-te Spalte und j-te Zeile

$$\rightsquigarrow g\cdot g^{\#} = g^{\#}\cdot g = \det(g)\cdot \mathbb{1} \qquad \text{vgl L.A.}$$

Also $q(g,h) = \frac{1}{\det(g)}\circ g^{\#}\cdot h$ stetig

Insbesondere sind also GL_n, $GL_n\mathbb{R}$ und $GL_n\mathbb{C}$ topologische Gruppen

(h) Ist G eine topologische Gruppe und $H\leq G$ eine Untergruppe, so ist H in der Teilraumtopologie wieder eine topologische Gruppe (denn die Einschränkung einer stetigen Abbildung ist stetig) und $H\hookrightarrow G$ ist ein Morphismus

(i) <u>Jede</u> Gruppe ist bezüglich der diskreten Topologie und bezüglich der Klumpentopologie eine topologische Gruppe.

3. <u>Satz</u> Sei $(G_j)_{j\in J}$ eine Familie von topologischen Gruppen. Dann ist das Produkt $\prod_{j\in J} G_j = K$, versehen mit der Produkttopologie, eine topologische Gruppe. Für jedes $j\in J$ ist die Projektion $pr_j : K \to G_j$ ein offener Morphismus. Ist H eine topologische Gruppe und ist $f_j : H \to G_j$ für jedes $j \in J$ ein Morphismus, so ist $f : H \to K$ $\quad h \mapsto (f_j(h))_{j\in J}$ ein Morphismus.

<u>Beweis</u> Wir müssen zeigen, dass $q : K\times K \to K$
$(g,h) \mapsto g^{-1}h$
stetig ist. Sei $q_j : G_j \times G_j \to G_j$ die entsprechende Abbildung.
Es gilt $pr_j \circ q = q_j \circ (pr_j \times pr_j)$, also ist $pr_j \circ q$ für jedes $j\in J$ stetig, damit auch q (universelle Eigenschaft der Produkttopologie). Folglich ist K eine topologische Gruppe. Da pr_j stetig, offen und ein Homomorphismus ist, ist pr_j ein offener Morphismus topologischer Gruppen.
Die letzte Behauptung folgt genauso: f ist stetig (wegen univ. Eigenschaft der Produkttopologie) und Homomorphismus von Gruppen, also ein Morphismus. □

4. <u>Satz</u> Eine topologische Gruppe G ist genau dann <u>Hausdorffsch</u>, wenn es ein $a \in G$ gibt mit $\overline{\{a\}} = \{a\}$.

<u>Bew.</u> In jedem Hausdorffraum sind endliche Mengen abgeschlossen.

Angenommen, $\{a\}$ ist abgeschlossen. Die Abbildung

$f: G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto g^{-1}ha$ ist stetig und

$f^{-1}(\{a\}) = \{(g,g) \mid g \in G\}$ die Diagonale in $G \times G$.

Ist die Diagonale abgeschlossen, so ist G Hausdorffsch. □
(ÜA)

5. <u>Satz</u> Seien G, K topologische Gruppen und sei $f: G \to K$ ein Homomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig, also ein Morphismus.

(ii) f ist an einem Punkt $a \in G$ stetig, d.h. zu jeder Umgebung $W \subseteq K$ von $f(a)$ gibt es eine Umgebung V von a mit $f(V) \subseteq W$ ("ε-δ-Kriterium in a")

<u>Bew.</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar (→ ÜA)

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $U \subseteq K$ offen. Zz: $f^{-1}(U)$ ist offen.

Sei $g \in f^{-1}(U)$. Es gilt $f(a) = f(ag^{-1}g) \in f(ag^{-1})U$,

also gibt es Umgebung V von a mit $f(V) \subseteq f(ag^{-1})U$

$\Rightarrow f(ga^{-1}V) \subseteq U$ und $ga^{-1}V$ ist Umgebung von g.

Folglich ist $f^{-1}(U)$ offen. □

6. Satz Sei G eine topologische Gruppe und sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann ist auch $\overline{H} \leq G$ eine Untergruppe. Wenn H normal ist, so auch $\overline{H}$.

Beweis Da $q : G \times G \to G$ $(g,h) \mapsto g^{-1}h$ stetig ist, gilt

$$q(\overline{H} \times \overline{H}) = q(\overline{H \times H}) \subseteq \overline{q(H \times H)} = \overline{H},$$ folglich

ist $\overline{H}$ Untergruppe.

Angenommen, $g \in G$ mit $gHg^{-1} = \gamma_g(H) \subseteq H$.

Da γ_g stetig ist, folgt $\gamma_g(\overline{H}) \subseteq \overline{\gamma_g(H)} \subseteq \overline{H}$ □

7. Satz Ist G eine topologische Gruppe und ist $A \subseteq G$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist der Normalisator

$$Nor_G(A) = \{ g \in G \mid gAg^{-1} = A \}$$

eine abgeschlossene Untergruppe.

Beweis Klar: $Nor_G(A)$ ist eine Untergruppe von G.

Für $a \in A$ sei $F_a(g) = gag^{-1}$. Dann ist

$F_a^{-1}(A) = \{ g \in G \mid gag^{-1} \in A \}$ abgeschlossen, also

auch $S = \bigcap \{ F_a^{-1}(A) \mid a \in A \}$

$$= \{ g \in G \mid gAg^{-1} \subseteq A \}$$

und $Nor_G(A) = S \cap S^{-1}$ □

Jetzt brauchen wir zum ersten Mal die Hausdorff-Eigenschaft.

8. <u>Satz</u> Sei G eine Hausdorff'sche topologische Gruppe, sei $A \subseteq G$ eine Teilmenge. Dann ist der <u>Zentralisator</u> $Cen_G(A) = \{ g \in G \mid ga = ag \text{ für alle } a \in A \}$ eine abgeschlossene Untergruppe.

<u>Beweis</u> Für $a \in G$ ist $Cen_G(a) = F^{-1}(e)$, wobei $F(g) = [g,a] = ga(ag)^{-1}$. Ist also $\overline{\{e\}} = \{e\}$, so ist $Cen_G(a)$ abgeschlossen und damit auch

$$\bigcap \{ Cen_G(a) \mid a \in A \} = Cen_G(A) \qquad \square$$

<u>Korollar</u> In einer Hausdorff'schen topologischen Gruppe ist das <u>Zentrum</u> $Cen(G) = Cen_G(G)$ abgeschlossen.

9. <u>Satz</u> Sei G eine Hausdorff'sche topologische Gruppe, sei $A \subseteq G$ eine abelsche Untergruppe. Dann ist auch $\overline{A}$ eine abelsche Untergruppe.

<u>Beweis</u> Betrachte die Kommutatorabbildung $[\,,\,] : G \times G \to G$. Das Urbild von $\{e\}$ ist abgeschlossen und enthält $A \times A$, also auch $\overline{A \times A} = \overline{A} \times \overline{A}$. $\square$

10. Lemma Sei G eine topologische Gruppe und seien $U, X \subseteq G$ Teilmengen. Wenn U offen ist, so ist UX und XU offen. Insbesondere sind die Abbildungen $m: G \times G \to G \quad (g,h) \mapsto gh$ offen.
$q: G \times G \to G \quad (g,h) \mapsto g^{-1}h$

Beweis Es gilt $UX = \bigcup \{Ux \mid x \in X\} = \bigcup \{\varrho_{x^{-1}}(U) \mid x \in X\}$
$XU = \bigcup \{xU \mid x \in X\}$ $\square$

11. Satz Sei G eine topologische Gruppe und sei $H \leq G$ eine Untergruppe.

(i) H ist genau dann offen, wenn H eine nicht leere offene Menge enthält.

(ii) Wenn H offen ist, dann ist H abgeschlossen.

(iii) H ist genau dann abgeschlossen, wenn es eine offene Menge $U \subseteq G$ gibt mit $U \cap H \neq \emptyset$ so, dass $U \cap H \subseteq U$ abgeschlossen im Teilraum U ist.

Beweis (i) Sei $U \subseteq H$ offen und nicht leer. Dann gilt $H = UH$, die Behauptung folgt aus Lemma 1.10.

(ii) Sei $H \leq G$ offen. Dann ist $G - H = \bigcup \{gH \mid g \notin H\}$ offen.

(iii) Sei $U \cap H$ nicht leer und abgeschlossen in U. Dann ist auch $U \cap H$ abgeschlossen in $U \cap \overline{H}$. Daher dürfen wir G durch $\overline{H}$ ersetzen und annehmen, dass H zusätzlich dicht in G ist

Da $U-(U\cap H)=U-H$ offen in G ist und H dicht ist, folgt $U-H=\emptyset$, d.h. $U\subseteq H$. Nach (i) und (ii) ist $H=\overline{H}=G$. $\square$

12. Korollar Ist G eine topologische Gruppe und ist $V\subseteq G$ eine Einsumgebung, so ist $\langle V\rangle\subseteq G$ eine offene Untergruppe.

13. Korollar Ist G eine Hausdorffsche topologische Gruppe und ist $H\leq G$ eine lokal kompakte Untergruppe, so ist H abgeschlossen. Insbesondere ist jede diskrete Untergruppe von G abgeschlossen.

Beweis Sei $C\subseteq H$ eine kompakte Einsumgebung in H. Dann gibt es $U\subseteq G$ offen mit $e\in U\cap H\subseteq C$, also $U\cap H=U\cap C$ abg. in U. Die Behauptung folgt aus Satz §1.11 (iii). Jede diskrete Menge ist lokal kompakt. $\square$

Das Produkt von abgeschlossenen Mengen in einer topologischen Gruppe ist nicht notwendig abgeschlossen!

Beispiel $G=\mathbb{R}$, $A=\mathbb{Z}$ $B=\sqrt{2}\cdot\mathbb{Z}$

$A,B\leq G$ abgeschlossene Untergruppen, aber $A+B\leq G$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

Das folgende Lemma ist nützlich.

14. Lemma (Wallace' Lemma)

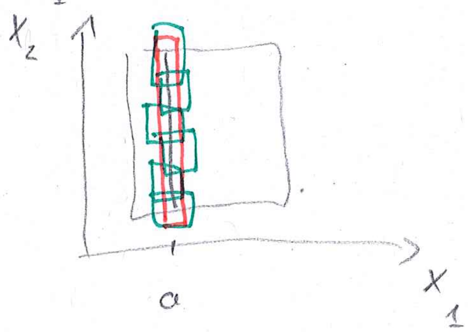
Seien $X_1, \dots, X_m$ Hausdorffräume, sei $A_j \subseteq X_j$ kompakt. Wenn $W \subseteq X_1 \times \dots \times X_2$ offen ist mit $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq W$, so gibt es $U_j \subseteq X_j$ offen mit

$$A_1 \times \dots \times A_m \subseteq U_1 \times \dots \times U_m \subseteq W.$$

Beweis Für $m = 1$ ist nichts zu zeigen. Betrachte $m = 2$ mit $A = A_1$, $B = A_2$. Sei $a \in A$. Für jedes $b \in B$ wähle Umgebung $U_b \times V_b$ von (a,b) so, dass $U_b \times V_b \subseteq W$. Da B kompakt ist gibt es endlich viele $b_1, \dots, b_s$ mit $\{a\} \times B \subseteq (U_{b_1} \times V_{b_1}) \cup \dots \cup (U_{b_s} \times V_{b_s})$

Setze $U_a = U_{b_1} \cap \dots \cap U_{b_s}$ $\quad V_a = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_s}$

$\Rightarrow \{a\} \times B \subseteq U_a \times V_a \subseteq W$



Da A kompakt ist, gibt es $a_1, \dots, a_r \in A$ mit

$$A \times B \subseteq (U_{a_1} \times V_{a_1}) \cup \dots \cup (U_{a_r} \times V_{a_r})$$

$U = U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_r}$ $\quad V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_r}$

$\Rightarrow A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$

Für $m \geq 3$ Induktion nach m.

Setze $B = A_2 \times \dots \times A_m$ $A = A_1$ $\Rightarrow$ es gibt U, V

mit $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$

$A_2 \times \dots \times A_m \subseteq V$ mit Induktion gibt es $U_2, \dots, U_m$

mit $A_2 \times \dots \times A_m \subseteq U_2 \times \dots \times U_m \subseteq V$

$\Rightarrow$ $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq U \times U_2 \times \dots \times U_m \subseteq W$ $\square$

15. <u>Satz</u> Sei G eine Hausdorffsche topologische Gruppe, sei $A \subseteq G$ kompakt und $B \subseteq G$ abgeschlossen. Dann sind AB und BA abgeschlossen.

<u>Beweis</u> Sei $g \in G - A\cdot B \Rightarrow A^{-1}g \cap B = \emptyset$, also $q(A \times \{g\}) \subseteq G - B$. Also gibt es eine offene Umgebung V von g mit $q(A \times V) \subseteq G - B$ (mit Wallace) $\Rightarrow A^{-1}V \cap B = \emptyset \Rightarrow V \cap AB = \emptyset$ $\square$

Jetzt betrachten wir Quotienten: Ist G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe, so versehen wir G/H mit der Quotiententopologie bzgl der Abbildung $p: G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Das heißt $W \subseteq G/H$ ist offen genau dann, wenn $p^{-1}(W) \subseteq G$ offen ist.

16. <u>Satz</u> Sei G eine topologische Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist $p: G \to G/H$ stetig und offen. Der Quotient G/H ist genau dann Hausdorffsch, wenn H abgeschlossen ist.

<u>Beweis</u> p ist stetige Quotientabbildung.

Sei $U \subseteq G$ offen $\Rightarrow$ $p^{-1}(p(U)) = UH \subseteq G$ offen $\Rightarrow$ $p(U) \subseteq G/H$ offen.

Wenn G/H Hausdorffsch ist, so ist $\{H\} \subseteq G/H$ abg., also $p^{-1}(\{H\}) = H \subseteq G$ abg.

Ist H abg., so ist $W = \{(x,y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in G - H\}$ $= q^{-1}(G-H)$ offen, und $(p \times p)(W) = \{(xH, yH) \mid xH \neq yH\}$ ist damit offen (da $p \times p$ auch offen). Folglich ist $\{(xH, xH) \mid x \in G\} \subseteq G/H \times G/H$ abg $\Rightarrow$ G/H Hausdorffsch $\square$

16\. <u>Korollar</u> Ist G eine topologische Gruppe und $N \trianglelefteq G$, so ist G/N eine topologische Gruppe, die genau dann Hausdorffsch ist, wenn $N \subseteq G$ abgeschlossen ist. Die Abbildung $G \to G/N$ ist ein offener Morphismus.

Insbesondere ist $G/\overline{N}$ Hausdorffsch (und $G/\overline{\{e\}}$ ist Hausdorffsch).

<u>Beweis</u> Sei $\bar{q}(gN, hN) = g^{-1}hN$, betrachte

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p \times p"'] & G \arrow[d, "p"] \\
G/N \times G/N \arrow[r, "\bar{q}"] & G/N
\end{tikzcd}$$

Da $p \times p$ offen und damit Quotientenabbildung ist, ist $\bar{q}$ stetig (denn $p \circ q$ ist stetig). Damit ist G/N eine topologische Gruppe, der Rest folgt aus §1.15 □

<u>Erinnerung</u> Ein topologischer Raum X heißt <u>zusammenhängend</u>, falls es <u>keine</u> offenen Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $X = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset \neq V$. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn Y in der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.
Ist Y zush., so auch $\overline{Y}$. Sind $(Y_j)_{j \in J}$ zush und ist $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcup_{j \in J} Y_j$ zush. (→ ÜA)

17. Ein topologischer Raum X heißt <u>total unzush.</u>, wenn alle zush. Teilmengen von X einelementig sind.

17. <u>Def</u> Sei G eine topologische Gruppe. Die <u>Einskomponente</u> ist $G^0 = \bigcup \{ Y \subseteq G \mid Y \text{ zush und } e \in Y \}$.

18. <u>Satz</u> Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist die Einskomponente G^0 ein abgeschlossener Normalteiler und G/G^0 ist eine total unzusammenhängende Hausdorffsche

topologische Gruppe.

<u>Beweis</u> G^0 ist zush. und abg. nach der vorigen Bemerkung. Damit ist auch $q(G^0 \times G^0) = (G^0)^{-1} G^0$ zush., also (weil $q(e,e)=e$) $q(G^0 \times G^0) \subseteq G^0$ $\Rightarrow$ G^0 ist Untergruppe. Für $a \in G$ ist $r_a(G^0) = a G^0 a^{-1}$ zush. und enthält e, also $a G^0 a^{-1} \subseteq G^0$ $\Rightarrow$ $G^0 \trianglelefteq G$.

Da G^0 abg. ist, ist $G/_{G^0}$ Hausdorffsch (§1.16)

Betrachte $p: G \to G/_{G^0}$ und setze $H = (G/_{G^0})^0$.

Zu zeigen: $H = \{G^0\}$. Sei $N = p^{-1}(H)$ $\Rightarrow$ $G^0 \subseteq N$ und $N \trianglelefteq G$ ist abgeschlossen.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "p"', "\text{offen}"] & G/_{G^0} \\ N \arrow[u, hook] \arrow[r, "p|_H^N"] & H \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Wegen $N = p^{-1}(H)$ ist $p|_H^N$ offen.

also trägt H die Quotiententopologie bzgl $p|_H^N$.

Angenommen, $V \subseteq N$ ist abgeschlossen und offen in N mit $e \in V$. Es folgt $vG_0 \subseteq V$ für alle $v \in V$, da vG_0 zush. ist mit $v \in vG_0$. Also $V = p^{-1}(p(V))$ $\Rightarrow$ $p(V)$ ist offen und abg. in H. Da H zush. ist, folgt $p(V) = H$ und damit $V = N$.

Folglich ist N zush. und damit $N = G^0$ $\square$

<u>Korollar</u> Sei $G \xrightarrow{f} K$ ein Morphismus von topologischen Gruppen. Wenn K total unzusammenhängend ist, so faktorisiert f durch ein Morphismus $\bar{f}$,

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & K \\ & G/G^0 \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

und $G^0 \subseteq \ker(f)$ $\square$

<u>Bemerkung</u> Eine topologische Gruppe G ist genau dann total unzusammenhängend, wenn G Hausdorffsch ist mit $G^0 = \{e\}$ $\square$

Wir betrachten jetzt die Metrisierbarkeit von topologischen Gruppen

19. <u>Def</u> Eine <u>Pseudometrik</u> $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit:
$$d(x,y) = d(y,x) \geq 0$$
$$d(x,x) = 0$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$
für alle $x,y,z \in X$.
Falls aus $d(x,y) = 0$ folgt, dass $x = y$, so heißt d <u>Metrik</u>.
Eine Pseudometrik d auf einer Gruppe G heißt <u>linksinvariant</u>, falls für alle $a,x,y \in G$ gilt $d(x,y) = d(ax,ay)$

Eine <u>Längenfunktion</u> l auf eine Gruppe G ist eine Abbildung $l: G \to \mathbb{R}$ mit

$$l(e) = 0 \qquad l(g) = l(g^{-1}) \geq 0 \qquad l(gh) \leq l(g) + l(h)$$

für alle $g, h \in G$. Dann ist $d(g,h) = l(g^{-1}h)$ eine linksinvariante Pseudometrik auf G; d ist genau dann eine Metrik, wenn $\{g \in G \mid l(g) = 0\} = \{e\}$. In jedem Fall ist $\{g \in G \mid l(g) = 0\}$ eine Untergruppe von G.

20. <u>Theorem</u> (Birkhoff-Kakutani) Sei G eine Hausdorffsche topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:

(i) Die Topologie auf G ist metrisierbar

(ii) Die Topologie auf G ist durch eine linksinvariante Metrik gegeben

(iii) Das Einselement $e \in G$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis.

Der Beweis benutzt ein technisches Lemma, das für sich nützlich ist.

Eine Einsumgebung W heißt <u>symmetrisch</u>, wenn $W = W^{-1}$. Ist V eine beliebige Einsumgebung, so ist $V \cap V^{-1}$ eine symmetrische Einsumgebung.

21 <u>Lemma</u> Sei G eine topologische Gruppe und sei $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von symmetrischen Einsumgebungen, mit (a) $K_nK_nK_n \subseteq K_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{Z}$ (b) $\langle \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} K_n\rangle = G$

Für $g\in G$ setzen wir

$$\ell(g) = \inf\{t\geq 0 \mid \exists\, k\geq 1,\ n_1,\dots,n_k\in\mathbb{Z} \text{ mit } t = 2^{n_1}+\dots+2^{n_k} \text{ und } g\in K_{n_1}\cdots K_{n_k}\}$$

Dann gilt:

- ℓ ist eine stetige Längenfunktion
- $\{g\in G \mid \ell(g) < 2^n\} \subseteq K_n$ für alle $n\in\mathbb{Z}$
- $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n = \{g\in G \mid \ell(g)=0\}$

<u>Beweis</u> Da $G = \langle \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} K_n\rangle$ gilt, ist ℓ überall definiert: da die K_n symmetrisch sind, gibt es zu jedem $g\in G$ $K_{n_1},\dots,K_{n_k}$ mit $K_{n_1}\cdots K_{n_k}\ni g$. Ist $g\in K_{n_1}\cdots K_{n_r}$, $h\in K_{m_1}\cdots K_{m_s}$, so $gh\in K_{n_1}\cdots K_{n_r}K_{m_1}\cdots K_{m_s}$. Damit folgt $\ell(gh)\leq \ell(g)+\ell(h)$. Da die K_n symmetrisch sind, gilt $\ell(g)=\ell(g^{-1})$. Da $e\in\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n$ ist $\ell(e)=0$

Für $g \in K_n$ gilt sicher $\ell(g) \le 2^n$. Sei $g \in G$ beliebig, sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{Z}$ so, dass $2^n < \varepsilon$. Ist $h \in gK_n$, so folgt $g^{-1}h, h^{-1}g \in K_n$, also

$$\left.\begin{aligned} \ell(g) &= \ell(hh^{-1}g) \le \ell(h) + 2^n \\ \ell(h) &= \ell(gg^{-1}h) \le \ell(g) + 2^n \end{aligned}\right\} \; |\ell(g) - \ell(h)| \le 2^n < \varepsilon$$

also ist ℓ stetig, denn gK_n ist Umgebung von g.

Zur letzten Behauptung. Es gilt immer $K_n \subseteq K_nK_nK_n \subseteq K_{n+1}$

Angenommen, $\ell(g) < 2^n$. Dann gibt es $k \ge 1$, $n_1, \dots, n_k$ mit $g \in K_{n_1} \cdots K_{n_k}$, $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} < 2^n$. Insbesondere ist $n_j < n$. Für $k = 1,2,3$ folgt $g \in K_{n-1}K_{n-1}K_{n-1} \subseteq K_n$.

Beh Wenn $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} < 2^n$, dann $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_n$.

Den Fall $k = 1,2,3$ haben wir gerade betrachtet, weiter mit Induktion nach $k \ge 4$.

Wenn $2^{n_1} + \dots + 2^{n_{k-1}} < 2^{n-1}$, so $K_{n_1} \cdots K_{n_{k-1}} \subseteq K_{n-1}$

$\Rightarrow K_{n_1} \cdots K_{n_{k-1}} K_{n_k} \subseteq K_{n-1} K_{n-1} \subseteq K_n$ und fertig

Wenn $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} \ge 2^{n-1}$ wähle das kleinste j mit $2^{n_1} + \dots + 2^{n_j} \ge 2^{n-1}$

$$\underbrace{K_{n_1} \cdots K_{n_{j-1}}} K_{n_j} \underbrace{K_{n_{j+1}} \cdots K_{n_k}} \subseteq K_{n-1} K_{n-1} K_{n-1} \subseteq K_n$$

Damit ist die Behauptung gezeigt

Es folgt $\bigcap_n K_n = \{ g \in G \mid \ell(g) = 0 \}$ $\square$

Beweis von Theorem §1.20

Klar: (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iii), zeige (iii) $\Rightarrow$ (ii)

Sei $(V_n)_{n\geq 0}$ eine Umgebungsbasis der Eins (d.h. jede Einsumgebung U enthält ein V_m). Für $n \geq 1$ setze $K_n = G$. Für $n \leq 0$ wählen wir induktiv symmetrische Einsumgebungen K_n mit $K_n \subseteq V_n$ und $K_n \cdot K_n \cdot K_n \subseteq K_{n+1}$. Das geht, weil $G \times G \times G \to G$, $(a,b,c) \mapsto abc$ stetig ist. Sei ℓ die entsprechende stetige Längenfunktion auf G nach Lemma §1.21. Es gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n \subseteq \bigcap_{n\geq 0} V_n = \{e\}$, also $\ell(g) = 0 \Leftrightarrow g = e$. Ist $g \in G$ beliebig und U eine Einsumgebung, wähle $n \in \mathbb{Z}$ so, dass $gK_n \subseteq gU$. Für $h \in G$ mit $\ell(g^{-1}h) = d(g,h) < 2^n$ folgt $h \in gK_n$, also ist die Topologie durch d gegeben.

□

22. <u>Theorem</u> Jede Hausdorffsche topologische Gruppe ist ein Tychonoff-Raum ($T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, vollständig regulär, stetige Funktionen trennen Punkte von abg. Mengen).

<u>Beweis</u> Sei $A \subseteq G$ abg., sei $g \in G - A$. Zu zeigen: es gibt $\varphi : G \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(g) = 0$ und $\varphi(A) = \{1\}$. Da G homogen ist, dürfen wir annehmen, dass $g = e$ gilt.
Setze $K_n = G$ für $n \geq 1$, $K_0 \subseteq G - A$ symmetrische Einsumgebung. Dann wählen wir symmetrische Einsumgebungen K_n, für $n < 0$, mit $K_n K_n K_n \subseteq K_{n+1}$. Sei l die resultierende Längenfunktion auf G. Wenn $l(g) < 1 = 2^0$, so $g \in K_0 \subseteq G - A$, also $l(a) \geq 1$ für alle $a \in A$. Setze $\varphi(g) = \min\{l, 1\}$ $\square$

<u>Korollar</u> Eine abzählbare Hausdorffsche topologische Gruppe ist total unzusammenhängend.

(ÜA)

23. <u>Erinnerung</u> Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt <u>nirgends dicht</u>, wenn $\overline{N}$ leeres Inneres hat (keine offene nichtleere Menge enthält).
Äquivalent dazu: $X - \overline{N}$ ist dicht in X.
<u>Bsp:</u> $\{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist nirgends dicht, hat aber Häufungspunkt 0. Klar: Teilmengen nirgends dichter Mengen sind nirgends dicht.
Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt <u>mager</u>, wenn M abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Äquivalent dazu: es gibt offene dichte Mengen $(U_n)_{n\geq 0}$ in X mit $M \cap \bigcap_{n\geq 0} U_n = \emptyset$.
<u>Bsp:</u> $\mathbb{R} \supseteq \mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$ ist mager, aber nicht nirgends dicht. In alten Büchern heißen magere Mengen "Mengen erster Kategorie". Klar: Teilmengen von mageren Mengen sind mager, abzählbare Vereinigungen von mageren Mengen sind mager. Nicht-magere Mengen heißen auch "Mengen zweiter Kategorie".
Ein topologischer Raum X heißt <u>Baire-Raum</u>, wenn für jede abzählbare Familie offener dichter Mengen $(U_n)_{n\geq 0}$ auch $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ dicht ist.
Ein Bairescher Raum ist also niemals mager in sich. Die Umkehrung gilt nicht. (ÜA)

#

<u>Baires Kategoriesatz</u> sagt: jeder vollständige metrische Raum und jeder lokal kompakte Raum ist Bairesch. (Wdh → Ü1)

Ein Hausdorffraum X heißt <u>σ-kompakt</u>, wenn es eine abzählbare Familie $(A_n)_{n\geq 0}$ kompakter Teilmengen $A_n \subseteq X$ gibt mit $\bigcup_{n\geq 0} A_n = X$.

<u>Bsp:</u> sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{Q}$ sind σ-kompakt.

24. <u>Satz von der offenen Abbildung</u> Sei $f: G \to K$ ein surjektiver Morphismus von topologischen Hausdorffschen Gruppen. Wenn G σ-kompakt ist und wenn K nicht mager ist, so ist f offen.

<u>Bew:</u> Betrachte

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"', "\text{offen}"] & & K \\ & G/\ker(f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ ist stetig und bijektiv und $G/\ker(f)$ ist wieder σ-kompakt. Also reicht es, den Fall zu betrachten, wo f <u>bijektiv</u> ist. Seien $A_n \subseteq G$ kompakte Mengen mit $G = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. Für jedes n ist dann die Einschränkung $f : A_n \to f(A_n)$ ein Homöomorphismus (weil bijektiv, stetig und abgeschlossen). Da $f(A_n)$ abgeschlossen (weil kompakt) und $K = \bigcup_{n\geq 0} f(A_n)$ nicht mager ist, gibt es ein $m \geq 0$ so, dass $f(A_m)$ eine nichtleere offene Menge V enthält. Sei $U = f^{-1}(V)$, betrachte

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_m & \xrightarrow[\text{homöo}]{f} & f(A_m) \end{array}$$

Es folgt, dass die Umkehrabbildung f^{-1} auf $V \subseteq K$ stetig ist. Nach §1.5 ist f^{-1} ein Morphismus und damit ist f ein Homöomorphismus. $\square$

<u>Korollar</u>. Seien G, K Hausdorffsche topologische Gruppen und $f : G \to K$ ein surjektiver Morphismus. Wenn G von einer kompakten Menge erzeugt wird und wenn K lokal kompakt oder vollständig metrisch ist, so ist f offen. $\square$

Beachte aber: $\mathbb{R}_{\text{diskret}} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{R}$ nicht offen

nicht lokal kompakt!

25. **Def** Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt <u>comager</u>, wenn $X - A$ mager ist (comager ist <u>nicht</u> das selbe wie nicht-mager !)

Ist $V \subseteq X$ offen und $A \subseteq X$ beliebig, dann heißt <u>A comager in V</u>, wenn $V \cap A$ comager im Teilraum V ist.

<u>Lemma A</u> Sei X ein topologischer Raum und sei $V \subseteq X$ offen.

(i) Sei $M \subseteq V$. Dann ist M genau dann mager, wenn M im Teilraum V mager ist

(ii) Wenn $A \subseteq X$ comager ist, so ist A comager in V.

<u>Bew.</u> Angenommen, $N \subseteq V$ ist nirgends dicht in V. Dann gibt es $W \subseteq V$ offen und disjunkt zu N mit $\overline{W} \supseteq V$. Es folgt $N \subseteq W \cup (X - \overline{V})$, diese Menge ist dicht und offen. Also ist N nirgends dicht.

Angenommen, der Abschluss der Menge $N \subseteq V$ <u>in V</u> enthält eine nicht leere offene Menge $U \subseteq V$. Dann gilt $U \subseteq \overline{N}$. Damit folgt (i) durch Übergang auf abz. Vereinigungen

Behauptung (ii) ist ein Spezialfall: ist $M = X - A$ mager, so ist $M \cap V = V - A$ mager im Teilraum V nach (i)

$\square$

Lemma B Sei $(X_j)_{j\in J}$ eine Familie von topologischen Räumen und sei $X=\coprod_{j\in J} X_j$ ihr Koprodukt (= ihre disjunkte Vereinigung), d.h. $W\subseteq X$ ist genau dann offen, wenn für jedes $j\in J$ auch $X_j\cap W$ offen in X_j ist. Sei $M\subseteq X$. Wenn $M_j := X_j\cap M$ für jedes $j\in J$ mager in X_j ist, so ist M mager.

Beweis Sei $N\subseteq X$ so, dass für jedes $j\in J$ $X_j\cap N=N_j$ nirgends dicht in X_j ist. Wähle $U_j\subseteq X_j$ offen und dicht mit $U_j\cap N_j=\emptyset$. Dann ist $U=\bigcup_{j\in J} U_j$ dicht in X und $N\cap U=\emptyset$, also ist N nirgends dicht in X. Damit folgt die Behauptung durch Übergang auf abz. Vereinigungen. $\square$

26. **Def** Sei X ein topologischer Raum, sei $A\subseteq X$.

Wir definieren $O(A)=\bigcup\{U\subseteq X \text{ offen und } A \text{ comager in } U\}$

Klar: $O(A)$ ist offen (eventuell leer!)

Theorem (Banachs Kategoriesatz)

Wenn $O(A)\neq\emptyset$, so ist A comager in $O(A)$.

Beweis Wir betrachten Mengen $\mathcal{C}$ von offenen nichtleeren Teilmengen von $O(A)$ mit folgender Eigenschaft:

(a) $U,V\in\mathcal{C},\ U\neq V \Rightarrow U\cap V=\emptyset$

(b) A ist comager in allen $U\in\mathcal{C}$

Solche $\mathcal{C}$ gibt es, da $O(A)\neq\emptyset$.

Sei P die Menge aller solchen Mengen $\mathcal{C}$. Dann ist $(P, \subseteq)$ partiell geordnet. Ist $L \subseteq P$ linear geordnet, so ist $\bigcup L \in P$. Nach Zorns Lemma gibt es in P also maximale Elemente, wir wählen ein solches maximales $\mathcal{C} \in P$. Es sei $W = \bigcup \mathcal{C}$

Beh $O(A) - W$ ist nirgends dicht.

Bew: $\overline{O(A) - W} = B$ ist abg, zeige, dass B leeres Inneres hat. Angenommen, $V \neq \emptyset$, $V \subseteq B$. Dann gibt es $u \in O(A) \cap V$ sowie $U \subseteq X$ offen mit $u \in U$ und A ist comager in U; folglich ist A comager in $U \cap V$ (Lemma §1.25A) und damit $\mathcal{C} \cup \{U \cap V\} \in P$ $\lightning$ $\square$

Beh A ist comager in W

Bew: $\coprod \{U \mid U \in \mathcal{C}\}$ ist homöomorph zu W.

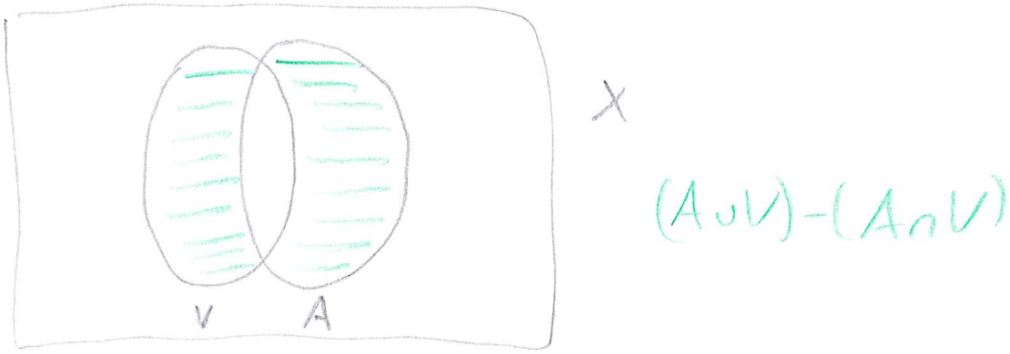
Für jedes $U \in \mathcal{C}$ ist $U - A$ mager in U, nach Lemma §1.25B ist $W - A$ mager in W $\square$

Beweis des Theorems:

$O(A) = M \dot\cup W$, M nirgends dicht in X und damit in $O(A)$ uns $O(A) - A = \underbrace{(M - A)}_{\substack{\text{nirgends} \\ \text{dicht in} \\ O(A)}} \dot\cup \underbrace{(W - A)}_{\substack{\text{mager in } W, \\ \text{also mager in} \\ O(A) \text{ nach} \\ \text{Lemma §1.25A}}}$ ist mager in $O(A)$ $\square$

#

27. **Def** Sei X ein top. Raum, sei $A \subseteq X$. Wir nennen A Baire-messbar (oder fast offen), wenn es eine offene Menge $V \subseteq X$ gibt, so dass die symmetrische Differenz $(V \cup A) - (V \cap A)$ mager ist



Lemma Ist $A \subseteq X$ Baire-messbar und nicht mager, so ist $O(A)$ ~~≠~~ nicht mager, also nicht leer.

Beweis Sei $V \subseteq X$ offen, $M = (V \cup A) \cap (V \cup A)$ mager. Wäre V mager, so auch $A \subseteq V \cup M$ ↯. Wieder ist $V - A \subseteq M$ mager, also $V \subseteq O(A)$ □

28. **Theorem** (Pettis' Lemma) Sei G eine topologische Gruppe, seien $A, B \subseteq G$ nicht magere Mengen. Dann gilt $O(A)O(B) \subseteq AB$. Ist A nicht mager und Baire-messbar, so ist $A^{-1}A$ eine Einsumgebung.

Beweis

Bek. $O(\emptyset) = \emptyset$. Denn $O(\emptyset) = \bigcup\{V \subseteq G \mid V$ offen und mager$\}$ ist translations invariant. Wenn also $O(\emptyset) \neq \emptyset$, so ist $G = O(\emptyset)$ mager ↯ weil $A, B \subseteq G$ nicht mager.

Sei jetzt $g \in O(A)\,O(B) \Rightarrow O(A) \cap g\,O(B)^{-1} \neq \emptyset$.
Nun gilt $g\,O(B)^{-1} = g\,O(B^{-1}) = O(gB^{-1})$, da Inversion und λ_g Homöomorphismen sind. Also folgt

$W = O(A) \cap O(gB^{-1}) \neq \emptyset$. Damit folgt mit Lemma §1.25.A, dass A und gB^{-1} comager in W sind $\Rightarrow$
$A \cap gB^{-1}$ comager in $W \neq \emptyset \overset{\text{Beh.}}{\underset{\text{oben}}{\Rightarrow}} A \cap gB^{-1} \neq \emptyset$

$\Rightarrow g \in AB$.

Ist A nicht mager und Baire-messbar, so ist $O(A) \neq \emptyset$ nach Lemma §1.27, also

$$\underbrace{O(A)^{-1}\,O(A)}_{\text{Einsumgebung}} = O(A^{-1}) \cdot O(A) \subseteq A^{-1}A \qquad \square$$

Korollar: Ist G eine topologische Gruppe und ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist H offen, falls H eine nicht-magere Baire-messbare Menge enthält. □

Wie sehen Baire-messbare Mengen aus?

Erinnerung an Maßtheorie / Analysis III: die **Borelmengen** sind die Mengen in einem topologischen Raum, die in der von den offenen Mengen erzeugten σ-Algebra liegen.

29. **Satz** Sei X ein topologischer Raum. Die Baire-messbaren Mengen in X bilden eine σ-Algebra, die alle Borelmengen enthält.

Beweis (i) $\emptyset$ ist Baire messbar (klar)

(ii) A Baire-messbar $\Rightarrow$ $X - A = B$ Baire-messbar

Sei $V \subseteq X$ offen und $(A \cup V) - (A \cap V)$ mager. Sei $U = X - \overline{V}$. Die symmetrische Differenz ändert sich nicht beim Übergang auf Komplemente, also

$$
\begin{aligned}
(B \cup U) - (B \cap U) &= (A \cup \overline{V}) - (A \cap \overline{V}) \\
&\subseteq \big((A \cup V) \cup (\overline{V} - V)\big) - (A \cap \overline{V}) \\
&\subseteq \underbrace{\big((A \cup V) - (A \cap V)\big)}_{\text{mager}} \cup \underbrace{(\overline{V} - V)}_{\text{nirgends dicht}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ B Baire-messbar

(iii) Ist A_n Baire-messbar für alle $n \in \mathbb{N}$, so auch $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$

Schreibe $M_n = (A_n \cup U_n) - (A_n \cap U_n)$, U_n offen,
M_n mager, $U = \underbrace{\bigcup_{n \geq 0} U_n}_{\text{offen}}$ $M = \underbrace{\bigcup_{n \geq 0} M_n}_{\text{mager}}$

$$A_n - U \subseteq A_n - U_n \subseteq M_n \Rightarrow A - U \subseteq M$$
$$U_n - A \subseteq U_n - A_n \subseteq M_n \Rightarrow U - A \subseteq M$$
$$\Rightarrow (A \cup U) - (A \cap U) \subseteq M$$

(iv) Jede offene Menge ist Baire-messbar. □

<u>Erinnerung</u> Ein topologischer Raum heißt <u>Lindelöf Raum</u>, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung hat.

<u>Bsp</u>:
- separable Räume (abz. dichte Teilmenge existiert)
- σ-kompakte Räume
- Räume mit einer abz. Basis der Topologie

30. <u>Satz</u> Seien G, K topologische Gruppen und sei $f: G \to K$ ein nicht notwendig stetiger Homomorphismus. Angenommen, G ist nicht mager und K ist Lindelöf. Falls für jede offene Menge $V \subseteq K$ das Urbild $E = f^{-1}(V)$ Baire-messbar ist, so ist f stetig, also ein Morphismus von top. Gruppen.

Bew. Da $\overline{f(G)} \subseteq K$ wieder Lindelöf ist (ÜA), können wir OE annehmen, dass $f(G)$ dicht in K ist. Sei $U \subseteq K$ eine Einsumgebung. Wir suchen eine Einsumgebung $W \subseteq G$ mit $f(W) \subseteq U$, dann ist f stetig nach § 1.5.

Wir wählen eine Einsumgebung $V \subseteq K$ mit $V^{-1}V \subseteq U$ und setzen $E = f^{-1}(V)$. Da K Lindelöf ist, gibt es Elemente $(g_n)_{n\geq 0}$ in G mit $K = \bigcup_{n\geq 0} f(g_n)V$, also $G = \bigcup_{n\geq 0} g_n E$. Da G nicht mager ist, ist E nicht mager. Nach Pettis' Lemma ist $E^{-1}E = W$ eine Einsumgebung und $f(E^{-1}E) \subseteq V^{-1}V \subseteq U$ □

Korollar Seien G, K top. Gruppen, $f: G \to K$ ein nicht notwendig stetiger Homomorphismus. Falls G lokalkompakt oder metrisch vollständig ist, K separabel oder σ-kompakt ist und falls f Borel-messbar ist (Urbilder offener Mengen sind Borelmengen), so ist f stetig. □