Vorlesung zur Linearen Algebra 1 vom 31. Januar 2014

Wdh.: Sei V K-VR, $\{b_1, \ldots, b_m\}$ Basis von V.

(a) für $1 \le i \ne j \le m$, $s \in K$ sei $\tau_{ij}(s) : V \to V$ def. durch

$\tau_{ij}(s)(b_k) = b_k$ für $k \ne j$

und $\tau_{ij}(s)(b_j) = b_j + b_i s$.

$\rightsquigarrow$ Begleitmatrix $T_{ij}(s) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}$
$$T_{ij}(s) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \boxed{s} & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Eigenschaften:

$T_{ij}(s) \cdot X$ erhält man durch Multiplikation des s-fachen der j-ten Zeile von X zur i-ten Zeile von X

$X \cdot T_{kl}(t)$ " " " " " t-fachen " k-ten Spalte " " l-ten Spalte "

(b) für $1 \le i \le m$, $a \in K^*$ sei $\delta_i(a) : V \to V$ def. durch

$\delta_i(a)(b_k) = b_k$ für $k \ne i$

$\delta_i(a)(b_i) = b_i \cdot a$ $\rightsquigarrow$ Begleitmatrix

$$D_i(a) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & a & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \end{array}$$

Eigenschaften:

$D_i(a) \cdot X$ erhält man durch Multiplikation der i-ten Zeile mit a,

$X \cdot D_j(b)$ " " " " " j-ten Spalte mit b.

(c) für $\pi \in \mathrm{Sym}(m)$ sei $L(\pi) : V \to V$ def. durch

$L(\pi)(b_k) = b_{\pi(k)}$ für alle k.

$\rightarrow$ Begleitmatrix $P(\pi) = (e_{\pi(1)} | e_{\pi(2)} | \ldots | e_{\pi(m)})$,

da $P(\pi)(e_j) = e_{\pi(j)}$ für alle j.

Damit ist
$$P(\pi)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ v_{\pi^{-1}(m)} \end{pmatrix},$$

denn $P(\pi)\cdot\sum_{i=1}^{m} e_i v_i = \sum_{i=1}^{m} P(\pi)(e_i) v_i = \sum_{i=1}^{m} e_{\pi(i)} v_i = \sum_{j=1}^{m} e_j v_{\pi^{-1}(j)}$.

Lemma:

Sei $X \in K^{n\times m}$ und $P(\pi) \in K^{n\times n}$ sowie $P(\varrho) \in K^{m\times m}$.

Die Matrix $Y = P(\pi)\cdot X$ entsteht aus X durch Ersetzen der $\pi(j)$-ten Zeile durch die j-te Zeile.

Die Matrix $Z = X\cdot P(\varrho)$ entsteht aus X durch Ersetzen der k-ten Spalte durch die $\varrho(k)$-te Spalte.

Beweis:

$$P(\pi)\cdot X\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = P(\pi)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{\pi^{-1}(1)} \\ \vdots \\ w_{\pi^{-1}(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{\pi^{-1}(1),1} & \cdots & \xi_{\pi^{-1}(1),m} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{\pi^{-1}(n),1} & \cdots & \xi_{\pi^{-1}(n),m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$w_{\pi^{-1}(p)} = \sum_{q=1}^{m} \xi_{\pi^{-1}(p),q} v_q$$

$\rightsquigarrow$ haben i-te Zeile ersetzt durch $\pi^{-1}(i)$-te Zeile

$\rightsquigarrow$ haben $\pi(j)$-te Zeile " " j-te Zeile

$$X\cdot P(\varrho)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = X\cdot\begin{pmatrix} v_{\varrho^{-1}(1)} \\ \vdots \\ v_{\varrho^{-1}(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{1\varrho(1)} & \cdots & \xi_{1\varrho(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n\varrho(1)} & \cdots & \xi_{n\varrho(m)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

$$u_p = \sum_{q=1}^{m} \xi_{pq} v_{\varrho^{-1}(q)} = \sum_{q=1}^{m} \xi_{p,\varrho(q)} v_q.$$

$\square$

Fazit: Durch Multiplikation einer Matrix $X \in K^{n \times m}$ mit Matrizen vom T, D, P von links und rechts können wir:
- Zeilen/Spalten von X vertauschen
- Zeilen/Spalten von X mit Skalaren $\neq 0$ multiplizieren
- ein Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte addieren.

Dabei ändert sich der Rang von X nicht, denn diese Matrizen sind alle invertierbar.
Die entsprechenden Umformungen von X heißen elementare Matrizenumformungen.

$\boxed{22.}$ Lemma: Sei $X \in K^{n \times m}$ eine Matrix, bei der nicht alle Einträge $\xi_{p,q} = 0$ sind. Dann gibt es Permutationsmatrizen $P(\pi) \in K^{n \times n}$, $P(\rho) \in K^{m \times m}$, Matrix $D_1(a) \in K^{n \times n}$ sowie

$$T_{j1}(s_j) \in K^{n \times n},\ s_j \in K \text{ für } j = 2, 3, \ldots, n,$$
$$\text{und } T_{1i}(t_i) \in K^{m \times m},\ t_i \in K \text{ für } i = 2, 3, \ldots, m,$$

mit

$$T_{n1}(s_n) \cdot \ldots \cdot T_{21}(s_2) \cdot D_1(a) P(\pi) \cdot X \cdot P(\rho) \cdot T_{12}(t_2) \cdots T_{1m}(t_m)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \qquad * = \text{unbekannt}$$

Die Matrizen $D_1(a), P(\pi), P(\rho), T_{j1}(s_j), T_{1i}(t_i)$ sind explizit/algorithmisch bestimmbar.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es einen Eintrag $\xi_{pq} \neq 0$ in X.

Sei $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ die Permutation, die p und 1 vertauscht
und $\rho \in \mathrm{Sym}(m)$ " " " q und 1 " .

Es folgt $$P(\pi) X P(\varrho) = \begin{pmatrix} \xi_{pq} & * \cdots * \\ * & \\ \vdots & \boxed{*} \\ * & \end{pmatrix}.$$

Setzen $a = \xi_{pq}^{-1}$, es folgt
$$D_1(a) P(\pi) X P(\varrho) = \begin{pmatrix} 1 & \eta_{12} \cdots \eta_{1m} \\ \eta_{21} & \\ \vdots & \boxed{*} \\ \eta_{n1} & \end{pmatrix}.$$

Setze jetzt $s_2 = -\eta_{21}$, $s_3 = -\eta_{31}, \dots, s_n = -\eta_{n1}$
und setze $t_2 = -\eta_{12}$, $t_3 = -\eta_{13}, \dots, t_m = -\eta_{1m}$.

Dann:
$$T_{n1}(s_n) \cdots T_{21}(s_2) \underbrace{D_1(a) P(\pi) X P(\varrho)} T_{12}(t_2) \cdots T_{1m}(t_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{*} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$
□

<u>Korollar:</u> Sei $X \in K^{n \times m}$. Dann gibt es $L \in GL_n(K)$ und $R \in GL_m(K)$ mit
$$L \cdot X \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$
und L und R sind explizit berechenbar.

<u>Beweis:</u> Wenn alle Einträge $\xi_{pq} = 0$ sind, ist nichts zu tun.
Sonst Induktion nach $\min\{m, n\} = l$.
Für $l = 1$ sind wir mit dem vorigen Lemma fertig.
Für $l > 1$ liefert das vorige Lemma Matrizen
$L' \in GL_n(K)$ und $R' \in GL_m(K)$ mit
$$L' X R' = \begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \\ | & \boxed{\tilde{X}} \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} \in K^{(n-1) \times (m-1)}.$$

Nach Induktionsannahme gibt es $\tilde{L} \in GL_{n-1}(K)$ und $\tilde{R} \in GL_{m-1}(K)$ mit

$$\tilde{L}\hat{X}\hat{R} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Für
$$L'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{L}} \\ 0 & \end{bmatrix}, \quad R'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\hat{R}} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

folgt
$$\underbrace{L'' \cdot L'}_{L} \cdot X \cdot \underbrace{R' \cdot R''}_{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \end{bmatrix}.$$ $\square$

Da L und R invertierbar sind, ist die Anzahl der Einträge 1 genau der Rang von X.

<u>Anwendung 1 : Berechnung der Inversen</u>

Wenn X invertierbar ist, so gilt $m = n = rk(X)$.

Also $\quad L \cdot X \cdot R = \mathbb{1}_m \rightsquigarrow X R = L^{-1} \cdot \mathbb{1}_m = L^{-1}$

$$\rightsquigarrow X \cdot R L = \mathbb{1}_m, \text{ genauso } R L X = \mathbb{1}_m,$$

d.h.

$$X^{-1} = R \cdot L.$$

Da wir R und L explizit berechnen können, ist das eine Methode, Matrizen zu invertieren. $\square$

<u>Anwendung 2: Lösen eines linearen Gleichungssystems</u>

Gegeben: $X \in K^{n \times m}$ und $w \in K^n$,

Gesucht: $v \in K^m$ mit $X \cdot v = w$.

$$X \cdot v = w \iff L X v = L w \iff \underbrace{L X R}\underbrace{R^{-1} v}_{=\tilde{v}} = \underbrace{L w}_{\tilde{w}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{w}_n \end{pmatrix}.$$

Lösbar genau dann, wenn $\tilde{w}_j = 0$ für alle $j > r$.
Die Lösungen $\tilde{v}$ sind dann von der Form

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \vdots \\ \tilde{w}_r \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-r} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}}\right\} \text{gegeben} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}}\right\} \text{frei wählbar,} \end{matrix} \quad x_1, \dots, x_{m-r} \in K \text{ beliebig,}$$

und $v = R \cdot \tilde{v}$ gibt die Lösungen des ursprünglichen Gleichungssystems. $\square$

ENDE